

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 31 ΜΑΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να δείξετε: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 7

B. Για καθένα από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη Σ, αν η πρόταση είναι Σωστή, ή Λ, αν είναι Λανθασμένη.

1. Έστω f πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ και $x_0 \in \Delta$. Έστω επίσης $f(x) \neq 0$ για κάθε $x_0 \in \Delta$.

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Μονάδες 3

2. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\alpha, -\beta)$ των συζυγών μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

Μονάδες 3

3. Αν μια πραγματική συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 3

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού $\Delta = [0, +\infty)$, τότε $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 3

5. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 3

6. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 13 = 0$ (1)

α. Να λυθεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση (1).

Μονάδες 9

β. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{|z_1|} - 2|z_1 \cdot z_2| + \sqrt{13}|z_2| + i^{2006}.$$

Μονάδες 9

γ. Αν $z_1 = 2 + 3i$, τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει: $|z - z_1| = 5$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \lambda, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 8x + 4}{4x}, & x > 1 \end{cases}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

I. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 10

II. Για $\lambda = 0$

α. να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Μονάδες 7

β. να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Για $k \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - kx^2 + 10$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

I. Να βρεθεί η τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

II. Για $k = 3$

α. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

β. να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

Μονάδες 5

γ. και για κάθε $a \in (14, 15)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = a - 5$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$

Μονάδες 7

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ