ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

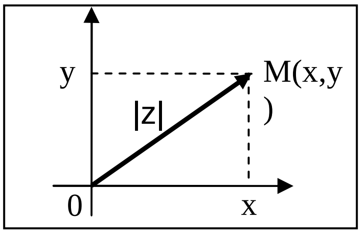
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1. Θεωρία Σελ. 217 σχολικού βιβλίου

2. Ορίζουμε ως μέτρο του z την απόσταση του Μ από την αρχή Ο, δηλαδή: $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Β. 1 Σωστό

2 → Λάθος

3 → Λάθος

4 → Σωστό

5 → Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. Re(z) + Im(z) = 0

δηλ. $\lambda^2 - 2 + 3 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Οπότε ο z γίνεται z = -1 + i

β.

$|w| = 5$ δηλ. $\sqrt{k^2 + 4^2} = 5 \Leftrightarrow k^2 = 9$

οπότε: $\left.\begin{matrix} k^2 = 9 \\ k \rangle 0 \end{matrix}\right\}$ άρα $k = 3$

γ. $z + \mu\bar{z} = 3i - w$ δηλ.

$-1 + i + \mu(-1 - i) = 3i - (3 + 4i) \Leftrightarrow$

$(2-\mu) + (2-\mu)i = 0$

άρα $2 - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 2$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Επειδή διέρχεται από το Α(1,1) θα ισχύει:
$f(1) = 1$ ή $1^3 + κ\cdot 1^2 + 3\cdot 1$ ή $2 + κ = 1$ ή $κ = -1$

β. Για $κ = -1$ η f γράφεται $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$
$f'(x) = (x^3 - x^2 + 3x - 2)' = 3x^2 - 2x + 3$
$Δ = (-2)^2 - 4\cdot 3\cdot 3 = 4 - 36 = -32 < 0$ Δηλ. $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

γ. Επειδή η f είναι συνεχής στο [0,1] και ισχύουν $f(0) = -2$, $f(1) = 1$
δηλ. $f(0)\cdot f(1) = -2 < 0$ σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα πραγματική στο (0,1).
Όμως επειδή $f'(x) < 0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1 - 1, οπότε η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο (0,1).
Συνεπώς η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα πραγματική στο (0,1)

ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ θα ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$$

$$\text{Όμως } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(2-α)x^2 - kx + 2}{x-3}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2-α)x^2 - kx + 2}{x^2 - 3x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-α)x^2}{x^2} = 2 - α \quad \text{Άρα: } 2 - α = 1 \text{ ή } 2 - 1 = α \text{ ή } α = 1$$

Ακόμη:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(2-1)x^2 - kx + 2}{x-3} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - kx + 2 - x^2 + 3x}{x-3} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-k)x}{x} = 3 - k \quad \text{Άρα } 3 - k = 0 \text{ ή } k = 3$$

β. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $ξ\in(1,2)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(ξ) = 0$

$$\text{Για: } α = 1, \quad k = 3 \quad f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$$

Στο [1, 2] η f είναι συνεχής, στο (1, 2) η f είναι παραγωγίσιμη.

$$f(1) = \frac{1^2 - 3\cdot 1 + 2}{1 - 3} = 0$$

$$f(2) = \frac{2^2 - 3\cdot 2 + 2}{2 - 3} = 0$$

Δηλαδή $f(1) = f(2)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,\ 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-3x+2}{x-3}\right)' = \frac{(x^2-3x+2)'(x-3) - (x^2-3x+2)(x-3)'}{(x-3)^2} =$$

$$\frac{(2x-3)(x-3) - (x^2-3x+2)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-3x+9 - x^2+3x-2}{(x-3)^2} =$$

$$\frac{x^2-6x+7}{x-3^2}$$

$$f'(1) = \frac{1^2-3\cdot 1+2}{(1-3)^2} = \frac{8-6}{(-2)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ακόμη f(1) = 0. Η εφαπτόμενη (ε) της Cf στο M(1,0) έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \text{ ή}$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x-1) \text{ ή}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$