ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 12

2. Έστω M(x,y) η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z = x+yi στο μιγαδικό επίπεδο. Τι ορίζουμε ως μέτρο του z;

Μονάδες 3

Β. *Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη* ***(Σ)****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***(Λ)****, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1. Μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Μονάδες 2

2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_o)$, όταν

$f(x) < f(x_o)$ για κάθε $x \in A$.

Μονάδες 2

3. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_o και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_o, τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \rangle \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Μονάδες 2

4. Αν z_1 και z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

Μονάδες 2

5. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z = \lambda^2 - 2 + (3-2\lambda)i,\quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad w = k + 4i,\quad k > 0.$$

Για τους z, w ισχύουν:

$$\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 0 \quad \text{και} \quad |w| = 5.$$

α. Να αποδείξετε ότι $z = -1+i$.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι $k = 3$.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $z + \mu\bar{z} = 3i - w$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,1). Να αποδείξετε ότι:

α. $k = -1$.

Μονάδες 5

β. Η συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

γ. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (0, 1).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(2-\alpha)x^2 - kx + 2}{x-3} \quad \text{με } \alpha, k \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq 3$$

α. Αν η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $k = 3$.

Μονάδες 10

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (1,2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_o = 1$.

Μονάδες 7