ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 12 Ιανουαρίου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 106

Α2. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 32

Α3. (α) Ψευδής .

(β) Για $v=0$ παίρνουμε την συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ για την οποία $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ ενώ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ επομένως δεν υπάρχει το όριο της $f(x)=\frac{1}{x}$ στο $x=0$ άρα δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x)=\frac{1}{x^{2v+1}}, v\in\mathbb{N}$

Α4.

Αν στο $x_0\in\mathbb{R}$ το όριο της f είναι:	$+\infty$	$-\infty$	0	$\alpha<0$	$+\infty$	$\alpha>0$
Αν στο $x_0\in\mathbb{R}$ το όριο της g είναι:	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	;	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f\cdot g$ είναι	$-\infty$	$+\infty$	;	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Α5.

(α) Σωστό **(β)** Σωστό **(γ)** Σωστό **(δ)** Λάθος **(ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται η $h\circ$ πρέπει το σύνολο $A=\{x\in A_g$ **και** $g(x)\in A_h\}$ να μην είναι το κενό .

Πράγματι :

$$\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in \mathbb{R} \\ 1-e^x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ e^x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ x<0 \end{cases}$$

Άρα $A=(-\infty,0)$ και ο τύπος της είναι $(h\circ$ $h(g(x))=\ln\left(\frac{1}{1-e^x}\right)$

Β2. Για την $f(x)=\ln\left(\frac{1}{1-e^x}\right), x<0$ θεωρούμε τυχαία $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$:

$$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1}>-e^{x_2} \Rightarrow 1-e^{x_1}>1-e^{x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-e^{x_1}}<\frac{1}{1-e^{x_2}} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{1-e^{x_1}}\right)<\ln\left(\frac{1}{1-e^{x_2}}\right) \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Επομένως η f γνησίως αύξουσα στο $A=(-\infty,0)$

Η f συνεχής στο $A=(-\infty,0)$ και γνησίως αύξουσα επομένως το σύνολο τιμών της είναι

$$f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to 0^-} f(x)\right)=(0,+\infty)$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{1}{1-e^x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln 1-\ln\left(1-e^x\right)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(1-e^x\right)\right)=0$

Επειδή :θέτοντας $u=1-e^x$ παίρνουμε $u_0=\lim\limits_{x\to-\infty}u=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-e^x\right)=1$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(1-e^x\right)\right)=-\lim\limits_{u\to 1}\ln u=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln\left(\frac{1}{1-e^x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\ln 1-\ln\left(1-e^x\right)\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\ln\left(1-e^x\right)\right)=+\infty$

Επειδή :θέτοντας $u=1-e^x$ παίρνουμε $u_0=\lim\limits_{x\to 0^-}u=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1-e^x\right)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(1-e^x\right)\right)=-\lim\limits_{u\to 0^-}\ln u=+\infty$

Β3. Η f γνησίως αύξουσα στο $A=(-\infty,0)$ άρα και $1-1$ επομένως αντιστρέφεται .

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f δηλαδή $A_{f^{-1}}=f(A)=(0,+\infty)$

$$f(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{1-e^x}\right)=y \Leftrightarrow \frac{1}{1-e^x}=e^y \Leftrightarrow 1-e^x=\frac{1}{e^y} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{e^y}=e^x$$

$$\Leftrightarrow x=\ln\left(1-\frac{1}{e^y}\right) \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{e^y-1}{e^y}\right)$$

Επομένως $f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)$ με $A_{f^{-1}}=(0,+\infty)$

Β4. Για την εύρεση του $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ημf(x)}{\ln(-x)}$ έχουμε :

$$\left|\frac{ημf(x)}{\ln(-x)}\right|=\frac{|ημf(x)|}{|\ln(-x)|}\le\frac{1}{|\ln(-x)|}$$

Επομένως : $-\frac{1}{|\ln(-x)|}\le\frac{ημf(x)}{\ln(-x)}\le\frac{1}{|\ln(-x)|}$

Όμως : $\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(-x)=-\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}|\ln(-x)|=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{|\ln(-x)|}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{|\ln(-x)|}\right)=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ημf(x)}{\ln(-x)}=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x\in[-5,5]$ ισχύει : $x^2+f^2(x)=25 \Leftrightarrow f^2(x)=25-x^2$ (1)

$$f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 25-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow x=5 \text{ ή } x=-5$$

Γ2. Η f συνεχής στο $[-5,5]$ και μηδενίζεται μόνο στα $x=5$ και $x=-5$ άρα διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-5,5)$

Από τη σχέση (1) έχουμε : $|f(x)|=\sqrt{25-x^2}$ και η f διατηρεί πρόσημο στο $(-5,5)$ δηλαδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-5,5)$ ή $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-5,5)$.

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f(0)=5$ άρα $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[-5,5]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για τις τιμές των άκρων του διαστήματος επομένως $f(x)=\sqrt{25-x^2}$

Γ3. (i) Για κάθε $x_1,x_2\in[0,5]$ με $x_1<x_2$ έχουμε :

$$x_1<x_2 \Rightarrow x_1^2<x_2^2 \Rightarrow -x_1^2>-x_2^2 \Rightarrow 25-x_1^2>25-x_2^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{25-x_1^2}>\sqrt{25-x_2^2} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\ \ (1)$$

και

$$x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2\ \ (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων $(1),(2)$ προκύπτει $g(x_1)>g(x_2)$ άρα η g γνησίως φθίνουσα στο $[0,5]$

(ii) Για κάθε $x\in[0,1]$ η ανίσωση γίνεται :

$$f(x^3)-f(x^2)>x^3-x^2 \Leftrightarrow f(x^3)-x^3>f(x^2)-x^2 \Leftrightarrow g(x^3)>g(x^2)$$

Και επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε $x^3<x^2 \Leftrightarrow x^3-x^2<0 \Leftrightarrow x^2(x-1)<0$

Το πρόσημο του $x^2(x-1)$ φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$	0	1 $+\infty$
x^2	+	+	+
$x-1$	-	-	+
$x^2(x-1)$	-	-	+

Άρα η ανίσωση $x^2(x-1)<0$ με $x\in[0,1]$ αληθεύει μόνο όταν $x\in(0,1)$

Γ4.

Ισχύει :

$\sqrt{25-x^2}\leq 5 \Leftrightarrow f(x)\leq f(0)$ για κάθε $x\in[-5,5]$ και επειδή $f(0)=5$ έχουμε $f(x)\leq f(0)$ για κάθε $x\in[-5,5]$ επομένως στη θέση $x=0$ έχει μέγιστό το $f(0)=5$

Η εξίσωση $\sqrt{24+\sigma\upsilon\nu^2 x}=6+\eta\mu^2 f(x)$ ισοδύναμα γίνεται:

$$\sqrt{24+\sigma\upsilon\nu^2 x}=6+\eta\mu^2 f(x)\Leftrightarrow\sqrt{24+1-\eta\mu^2 x}=6+\eta\mu^2 f(x)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{25-\eta\mu^2 x}=6+\eta\mu^2 f(x)\Leftrightarrow f(\eta\mu x)=6+\eta\mu^2 f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(\eta\mu x)=5+1+\eta\mu^2 f(x)\Leftrightarrow f(\eta\mu x)-5=1+\eta\mu^2 f(x)$$

Η τελευταία ισότητα δεν επαληθεύεται για κανέναν πραγματικό αριθμό διότι $1+\eta\mu^2 f(x)\geq 1$ και $f(\eta\mu x)-5\leq 0$ εφόσον $f(x)\leq 5$ για κάθε $x\in[-5,5]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. (α) Θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(x)-x^2+4}{x-2}, x\neq 2$ με $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=1$ επομένως

$$h(x)(x-2)=f(x)-x^2+4\Leftrightarrow f(x)=h(x)(x-2)+x^2-4$$

Από την τελευταία ισότητα έχουμε :

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left[h(x)(x-2)+x^2-4\right]=0$$

και επειδή η f συνεχής στο $x=2$ (από υπόθεση ξέρουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) θα ισχύει $f(2)=0$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)h(x)+x^2-4}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)h(x)+(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left[h(x)+x+2\right]=5$$

(β) Το σημείο $M(1,-5)$ ανήκει στην C_g άρα $g(1)=-5$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}=10 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1-h)+g(1)-g(1)}{h}=10$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(1+h)-g(1)}{h}-\frac{g(1-h)-g(1)}{h}\right)=10 \quad (1)$$

Η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα: $\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=g'(1)$

Για το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{g(1-h)-g(1)}{h}$ θέτουμε $u=-h$ άρα $u_0=\lim_{h\to 0}u=\lim_{h\to 0}(-h)=0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(1-h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+u)-g(1)}{-u}=-\lim_{h\to 0}\frac{g(1+u)-g(1)}{u}=-g'(1)$$

Άρα η σχέση (1) γίνεται :

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(1+h)-g(1)}{h}-\frac{g(1-h)-g(1)}{h}\right)=10$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(1-h)-g(1)}{h}=10$$

$$\Leftrightarrow g'(1)+g'(1)=10 \Leftrightarrow 2g'(1)=10 \Leftrightarrow g'(1)=5$$

Δ2.

Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο $A(2,f(2))$ είναι:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=5x-10$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της g στο $B(1,g(1))$ είναι:

$$y-g(1)=g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y+5=5x-5 \Leftrightarrow y=5x-10$$

Άρα η εφαπτομένη της f στο σημείο $A(2,f(2))$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο σημείο $B(1,g(1))$

Δ3.

Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=3$ και επειδή η g συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1=(-\infty,3)$ και $A_2=(3,+\infty)$

Επειδή $g(1)=-5<0$ και $1\in A_1$ λόγω της διατήρησης προσήμου της f στο A_1 θα έχουμε $g(x)<0$ για κάθε $x\in A_1$

Από την σχέση $g(0)\cdot g(4)<0$ συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $g(0),g(4)$ είναι ετερόσημοι .

Το $0\in A_1$ και $g(x)<0$ για κάθε $x\in A_1$ άρα $g(0)<0$ οπότε $g(4)>0$

Άρα $g(4)>0$ και $4\in A_2$ λόγω της διατήρησης προσήμου της f στο A_2 θα έχουμε $g(x)>0$ για κάθε $x\in A_2$.

Η g συνεχής στο $[3,5]$ άρα θα έχει μέγιστη τιμή.

Δηλαδή θα υπάρχει $x_0\in[3,5]$ τέτοιος ώστε $g(x)\le g(x_0)$

Όμως $g(x_0)>0$ και $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,3)$ άρα $g(x)\le g(x_0)$ για κάθε $x\in(-\infty,5]$

Δ4. Για $x\neq 0, x\neq 2$ έχουμε

$$xf(x)=(x-2)e^x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-2}=\frac{e^x}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-2}-\frac{e^x}{x}=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{x-2}-\frac{e^x}{x}, x\in(0,2)$ η οποία είναι συνεχής στο $(0,2)$,επίσης

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{x-2}-\frac{e^x}{x}\right)=\frac{f(0)}{-2}-(+\infty)=-\infty$$

$$\text{διότι : } \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x\frac{1}{x}\right)=1\cdot(+\infty)=+\infty \quad \text{και} \quad \frac{f(0)}{-2}>0$$

άρα υπάρχει αριθμός α κοντά στο 0^+ ώστε $f(\alpha)<0$

και

$$\lim_{x\to 2^+} h(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{f(x)}{x-2}-\frac{e^x}{x}\right)=f'(2)-\frac{e^2}{2}=5-\frac{e^2}{2}=\frac{10-e^2}{2}>0$$

άρα υπάρχει αριθμός β κοντά στο 2^- ώστε $f(\beta)>0$

Η h συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subseteq(0,2)$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta) \subseteq (0,2)$ τέτοιος ώστε $h(x_0)=0$