ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 217

Α2. **(α)** Ψευδής

(β) Για την συνάρτηση $f(x)=x^4$,επειδή η $f'(x)=4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Εντούτοις η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$ αφού $f''(0)=0$

Α3. Το (γ) είναι το ψευδές συμπέρασμα.

Α4. (α)Λάθος (β)Σωστό (γ)Σωστό (δ) Σωστό (ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x)=\frac{(2x+1)'(x-2)-(2x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{2(x-2)-(2x+1)}{(x-2)^2}=-\frac{5}{(x-2)^2}$$

Άρα $f'(x)<0$ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1=(-\infty,2)$,$A_2=(2,+\infty)$

Επομένως η f γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα αυτά .

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο A_1 άρα το σύνολο τιμών της είναι :

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to 2^-} f(x),\lim_{x\to -\infty} f(x)\right)=(-\infty,2)$$

διότι:

- $$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x+1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\left((2x+1)\frac{1}{x-2}\right)=5\cdot(-\infty)=-\infty$$

  αφού $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0$ και $x-2<0$ για $x<2$

- $$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+1}{x-2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{x}=2$$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο A_2 άρα το σύνολο τιμών της είναι: $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)\right)=(2,+\infty)$ διότι :

- $$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x+1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\left((2x+1)\frac{1}{x-2}\right)=5\cdot(+\infty)=+\infty$$

  αφού $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$ και $x-2>0$ για $x>2$

- $$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x+1}{x-2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{x}=2$$

$$\text{Άρα } f(A)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$$

Β2. Επειδή τα σύνολα τιμών είναι ξένα μεταξύ τους άρα η f είναι $1-1$ επομένως αντιστρέφεται .Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f άρα για κάθε $x\neq 2$ έχουμε

$$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{2x+1}{x-2}=y\Leftrightarrow 2x+1=yx-2y\Leftrightarrow 2x-yx=-1-2y$$

$$\Leftrightarrow x(2-y)=-1-2y\Leftrightarrow x=\frac{2y+1}{y-2}$$

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{x-2},x\neq 2$

Παρατήρηση: *Το ερώτημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί και χωρίς τη βοήθεια του Β1 ,αποδεικνύοντας ότι η* f *είναι 1-1 :* $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow ....x_1=x_2$*) και να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφης λύνοντας την εξίσωση* $f(x)=y$ *ως προς* x *παίρνοντας τους κατάλληλους περιορισμούς για το* y.

Β3. $f''(x)=\left(\dfrac{-5}{(x-2)^2}\right)'=\dfrac{10(x-2)}{(x-2)^4}=\dfrac{10}{(x-2)^3}$

$f''(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{10}{(x-2)^3}>0\Leftrightarrow (x-2)^3>0\Leftrightarrow x>2$

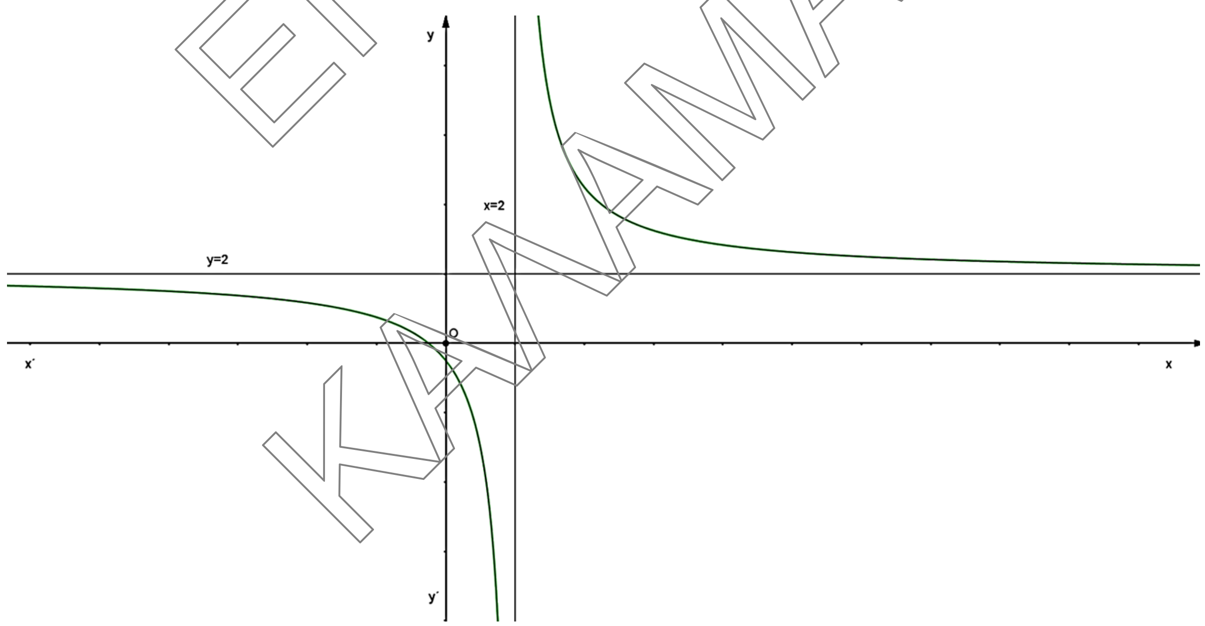
$f''(x)<0\Leftrightarrow \dfrac{10}{(x-2)^3}<0\Leftrightarrow (x-2)^3<0\Leftrightarrow x<2$

Στο διάστημα $(-\infty,2)$ η f κοίλη ενώ στο διάστημα $(2,+\infty)$ η f κυρτή.

Από το **Β1**. έχουμε $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ επομένως η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Από το **Β1**. έχουμε $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=2$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2$ άρα η ευθεία $y=2$ οριζόντια ασύμπτωτη της f και στο $(-\infty)$ και στο $(+\infty)$

Η γραφική της παρασταση είναι:



Β4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=f(x)-2 \Leftrightarrow h(x)=\frac{2x+1}{x-2}-2 \Leftrightarrow h(x)=\frac{5}{x-2}, x\neq 2$$

Ισχύει $h(x)>0$ για κάθε $x\in[3,5]$ και είναι συνεχής στο διάστημα αυτό άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_3^5 h(x)dx=\int_3^5 \tfrac{5}{x-2}dx=\left[5\ln(x-2)\right]_3^5=5\ln 3 \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 **(α)** Η $f(x)=\alpha^{x-1}=\frac{1}{\alpha}\alpha^x$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{1}{\alpha}\alpha^x\ln\alpha \text{ και } f''(x)=\frac{1}{\alpha}\alpha^x\ln^2\alpha$$

Προφανώς $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f κυρτή.

Α-τρόπος

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f ,η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι

$$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+f(x_0)-x_0f'(x_0)$$

Εφόσον η $y=x$ είναι η εφαπτομένη της f τότε οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία μόνο λύση λόγω κυρτότητας της f.

$$f'(x_0)=1 \textbf{ και } f(x_0)-x_0f'(x_0)=0$$

Δηλαδή: $f'(x_0)=1$ (1) και $f(x_0)=x_0$ (2)

Η εξίσωση (2) $f(x_0)=x_0\Leftrightarrow \alpha^{x_0-1}=x_0$, προφανής ρίζα $x_0=1$ η οποία είναι μοναδική εφόσον η f κυρτή και η $y=x$ είναι η εφαπτομένη της.

και $f'(x_0)=1\Leftrightarrow \ln\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=e$

Β-τρόπος

Η εφαπτομένη της σε κάθε σημείο της θα βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Έχουμε $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για το σημείο επαφής $x_0 = 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha^{x-1} - x, x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\varphi(x) \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό και παρατηρούμε ότι $\varphi(1) = 0$,δηλαδή $\varphi(x) \geq \varphi(1)$

Άρα η φ παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x = 1$,είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με $\varphi'(x) = \frac{1}{\alpha}\alpha^x \ln\alpha - 1$ άρα από θεώρημα Fermat $\varphi'(1) = 0$.

Δηλαδή: $\frac{1}{\alpha}\alpha^1 \ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = e$

Γ-τρόπος

Επειδή εφάπτονται υπάρχει σημείο $(x_0, f(x_0))$ ώστε :

$$\begin{cases} f(x_0) = x_0 \\ f'(x_0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^{x_0-1} = x_0 \\ \alpha^{x_0-1}\ln\alpha = 1 \quad (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^{x_0-1} = x_0 \Leftrightarrow \alpha^{x_0} = \alpha x_0 \\ x_0 \ln a = 1 \Leftrightarrow \alpha^{x_0} = e \overset{(1)}{\Leftrightarrow} e\ln\alpha = \alpha \end{cases}$$

Η εξίσωση $e\ln\alpha = \alpha$ έχει προφανή ρίζα $\alpha = e$ και επειδή η συνάρτηση $m(x) = e\ln x - x$ παρουσιάζει στη θέση $x = e$ μέγιστο το μηδέν η ρίζα είναι μοναδική .

<u>Αιτιολόγηση</u>

$m'(x) = \frac{e}{x} - 1$ και

$$m'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{e}{x} = 1 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} x = e$$

$$m'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{e}{x} > 1 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} x < e$$

$$m'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{e}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{e}{x} < 1 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} x > e$$

Δηλαδή η συνάρτηση $m(x)$ έχει μέγιστη τιμή την $m(e) = 0$

(β) Η g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{1}{x+1}$ και $g''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}<0$ άρα η g κοίλη στο $(-1,+\infty)$

Η εξίσωση εφαπτομένης της g στο $x=0$ είναι : $y-g(0)=g'(0)(x-0)$

$$g(0)=\ln 1=0 \ , g'(x)=\frac{1}{x+1} \text{ άρα } g'(0)=1$$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης είναι η $y=x$

Γ2. Η $h(x)=e^{x-1}-(x+1)\ln(x+1)+x$ παραγωγίσιμη στο $A=(-1,+\infty)$ με $h'(x)=e^{x-1}-\ln(x+1)=f(x)-g(x)$

Α-τρόπος

Η g κοίλη επομένως $g(x)\le x$ και η ισότητα ισχύει για $x=0$ άρα $g(x)\le x\le f(x)$ επομένως $f(x)-g(x)>0$ δηλαδή η h γνησίως αύξουσα.

Β-τρόπος

- Ισχύει $e^x\ge x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$με την ισότητα να ισχύει για $x=0$

  άρα $e^{x-1}\ge x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$
- Ισχύει $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$

  άρα $\ln(x+1)\le x$ για κάθε $x>-1$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$

  με βάση τα παραπάνω $\ln(x+1)\le x\le e^{x-1}$ για κάθε $x>-1$

  επομένως $f(x)-g(x)>0$ δηλαδή η h γνησίως αύξουσα στο $A=(-1,+\infty)$

  Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$e^{e^x}-e\left(e^x+1\right)\ln\left(e^x+1\right)+e^{x+1}>e^{ex}-e\left(ex+1\right)\ln\left(ex+1\right)+e^2x$$

$$\overset{:e}{\Leftrightarrow} e^{e^x-1}-\left(e^x+1\right)\ln\left(e^x+1\right)+e^x>e^{ex-1}-\left(ex+1\right)\ln\left(ex+1\right)+ex$$

$$\Leftrightarrow h\left(e^x\right)>h\left(ex\right)\overset{h:\gamma\nu\eta.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} e^x>ex\Leftrightarrow e^{x-1}>x\Leftrightarrow f\left(x\right)>x\Leftrightarrow x\in\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$$

Γ3. Η εξίσωση $x^3+\int_0^1 x\ f(t^2)\ dt=\int_0^{e-1} g(t)\ dt$ ισοδύναμα γράφεται:

$$x^3+\int_0^1 x\ f(t^2)\ dt=\int_0^{e-1} g(t)\ dt \Leftrightarrow x^3+x\int_0^1 f\left(t^2\right)dt=\int_0^{e-1}\ln\left(t+1\right)\ dt$$

$$\Leftrightarrow x^3+x\int_0^1 f\left(t^2\right)dt=1 \Leftrightarrow x^3+x\int_0^1 f\left(t^2\right)dt-1=0$$

Διότι:

$$\int_0^{e-1}\ln\left(t+1\right)\ dt=\int_0^{e-1}\left(t+1\right)'\ln\left(t+1\right)\ dt=\left[\left(t+1\right)\ln\left(t+1\right)\right]_0^{e-1}-\int_0^{e-1}\left(t+1\right)\frac{1}{t+1}dt$$

$$=e-\left[t\right]_0^{e-1}=e-e+1=1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k\left(x\right)=x^3+x\int_0^1 f\left(t^2\right)dt-1$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$ ως πολυωνυμική με $k\left(0\right)=-1<0$ και $k\left(1\right)=\int_0^1 f\left(t^2\right)dt>0$

Διότι $f\left(x\right)=e^{x-1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα και $f\left(x^2\right)=e^{x^2-1}>0$ οπότε $\int_0^1 f\left(t^2\right)dt>0$

Επομένως από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $k\left(x\right)=0$ έχει μια τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0,1\right)$ και λόγω μονοτονίας $k'(x)=3x^2+\int_0^1 f(t^2)dt>0$ η ρίζα μοναδική.

Γ4. $\alpha'(t)=2 \Leftrightarrow \alpha(t)=2t+c$ **και επειδή** $\alpha(0)=0$ ***άρα*** $\alpha(t)=2t$

$\beta'(t)=1 \Leftrightarrow \beta(t)=t+c_1$ **και επειδή** $\beta(0)=3$ ***άρα*** $\beta(t)=t+3$

Το ζητούμενο εμβαδόν με βάση το σχήμα είναι

$$E=\int_{2t}^{t+3} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{2t}^{t+3}=\frac{(t+3)^2}{2}-\frac{(2t)^2}{2}=\frac{-3t^2+6t+9}{2}$$

$$E(t)=\frac{1}{2}\left(-3t^2+6t+9\right), t\in[0,3]$$

Το εμβαδό γίνεται ίσό με το μηδέν όταν:

$$E(t)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(-3t^2+6t+9\right)=0 \Leftrightarrow t=3, t\in[0,3]$$

ή εναλλακτικά: Το εμβαδόν γίνεται μηδέν όταν $\alpha(t)=\beta(t) \Leftrightarrow t=3$

Για να βρούμε το μέγιστο:

$$E'(t)=\frac{1}{2}(-6t+6t), t\in(0,3)$$

$$E'(t)>0 \Leftrightarrow -6t+6>0 \Leftrightarrow t<1, t\in(0,3)$$

$$E'(t)<0 \Leftrightarrow -6t+6<0 \Leftrightarrow t>1, t\in(0,3)$$

Επομένως τη χρονική στιγμή $t=1$ το εμβαδό γίνεται μέγιστό

Παρατήρηση: Η συνάρτηση του εμβαδού θα μπορούσε να υπολογιστεί θεωρώντας το σχήμα τραπέζιο με μεγάλη βάση το $\beta(t)$,μικρή βάση το $\alpha(t)$ και ύψος τη διαφορά $\beta(t)-\alpha(t)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι:

$$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής επομένως θα είναι συνεχής στο $x=1$

άρα θα ισχύει: $f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$

Οπότε:

$$f(1)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x\ln x}{x-1}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1}\frac{1+\ln x}{1}=1$$

Εφόσον παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε ισχύει :

$$f'(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Οπότε:

$$f'(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{x\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x+1-1}{2(x-1)}\overset{\text{DLH}}{=}\frac{1}{2}$$

Άρα $\varepsilon: y-1=\frac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}(x+1)$

Για $x<1$:

$$f'(x)=e^{x-f(x)}\left(1-f'(x)\right)\Rightarrow f'(x)=f(x)\left(1-f'(x)\right)$$

$$\Rightarrow f'(x)=f(x)-f(x)f'(x)\Rightarrow f'(x)\left(1+f(x)\right)=f(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)+1}>0$$

Εφόσον το σύνολο τιμών της f είναι το $(0,+\infty)$

Για $x>1: f'(x)=\frac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}=\frac{-\ln x+x-1}{(x-1)^2}=-\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}>0$

Ισχύει $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ άρα για κάθε $x>1$ ισχύει : $\ln x<x-1\Leftrightarrow \ln x-x+1<0$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A=\mathbb{R}$.

Δ2. Έστω $\varphi(x)=2x\ln x-x^2+1\ ,\ x\geq 1$

Η φ παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $\varphi'(x)=2\ln x+2-2x=2(\ln x-x+1)<0$ για κάθε $x>1$ και επειδή η φ συνεχής στο $x=1$ άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ άρα για $x\geq 1\Rightarrow \varphi(x)\leq 0$.

$$x>1: f''(x)=-\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)(x-1)^2-2(x-1)(\ln x-x+1)}{(x-1)^4}=-\frac{-(x-1)^2-2x(\ln x-x+1)}{(x-1)^3}=$$

$$=-\frac{x^2-2x\ln x-1}{x(x-1)^3}=\frac{-x^2+2x\ln x+1}{x(x-1)^3}=\frac{\varphi(x)}{x(x-1)^3}<0$$

$$x<1: f''(x)=\frac{f'(x)(f(x)+1)-f'(x)f(x)}{(f(x)+1)^2}=\frac{f'(x)}{(f(x)+1)^2}>0$$

Η f κυρτή στο $(-\infty,1]$ και κοίλη στο $[1,+\infty)$

Δ3. $2019\in f(A)\Rightarrow$ υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}: f(x_0)=2019$ το x_0 είναι μοναδικό διότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα αντικαθιστώντας $x=x_0$ στη σχέση $0\leq g(x)\leq (f(x)-2019)^2$

Προκύπτει: $g(x_0)=0$ άρα η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $M(x_0,0)$, επίσης $g(x)\geq g(x_0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα στη θέση $x=x_0$ η g έχει ελάχιστο οπότε από θεώρημα Fermat: $g'(x_0)=0$

Η εξίσωση εφαπτομένης της g στο σημείο M είναι η $y=0$ άρα ο $x'x$ εφάπτεται στην C_g

Δ4 Θέτω $x^2 = t$ επομένως $2xdx = dt$ άρα

$$\int_0^1 \frac{2tf(t)}{\left(f(t)+1\right)^3}dt \overset{(*)}{=} \int_0^1 2tf''(t)dt = 2\left(\left[tf'(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f'(t)dt\right) =$$

$$= 2\left(f'(1) - f(1) + f(0)\right) = 2f(0) - 1$$

$(*)$ $f'(x) = \dfrac{f(x)}{f(x)+1}$, άρα : $f''(x) = \dfrac{f'(x)}{\left(f(x)+1\right)^2} = \dfrac{\dfrac{f(x)}{f(x)+1}}{\left(f(x)+1\right)^2} = \dfrac{f(x)}{\left(f(x)+1\right)^3}$