ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Δευτέρα 7 Ιανουαρίου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 25 παράγραφος 1.3

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 41 παράγραφος 1.5

Α3. **i.** Λάθος **ii.** Σωστό **iii.** Σωστό **iv.** Σωστό **v.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$

Β2. Κάνοντας πράξεις στην σχέση $\left(\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}\right)\left(\lambda\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right)=3$ έχουμε:

$$\left(\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}\right)\left(\lambda\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right)=3\Leftrightarrow \lambda\vec{\beta}^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\lambda^2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\lambda\vec{\alpha}^2=3$$

$$\Leftrightarrow \lambda\left|\vec{\beta}\right|^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\lambda^2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\lambda\left|\vec{\alpha}\right|^2=3\Leftrightarrow 4\lambda-1+\lambda^2-\lambda=3$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda-4=0\Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=-4$$

Β3. Η τετμημένη του διανύσματος $\vec{x}$ είναι: $\vec{\alpha}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1+1=2$

Η τεταγμένη του διανύσματος $\vec{x}$ είναι: $\vec{\beta}\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2=2-4=-2$

Με βάση τα παραπάνω το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι: $\vec{x}=(2,-2)$

$\lambda_{\vec{x}}=\dfrac{-2}{2}=-1$ αν ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{x}$ με τον άξονα $x'x$ τότε $\varepsilon\varphi\omega=-1$ άρα $\omega=135^\circ$ ή $\omega=315^\circ$

Επειδή το διάνυσμα $\vec{x}=(2,-2)$ βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο η ζητούμενη γωνία είναι η $\omega=315^\circ$

Β4. Βρίσκουμε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

$\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=1-2+4=3$ άρα $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\sqrt{3}$

$\left|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=4+4+4=12$ άρα $\left|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=2\sqrt{3}$

Επομένως έχουμε:

$$\vec{u}=\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|\vec{\beta}+\left|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{u}=\sqrt{3}\vec{\beta}+2\sqrt{3}\vec{\alpha}$$

και

$$\vec{v}=\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|\vec{\beta}-\left|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{v}=\sqrt{3}\vec{\beta}-2\sqrt{3}\vec{\alpha}$$

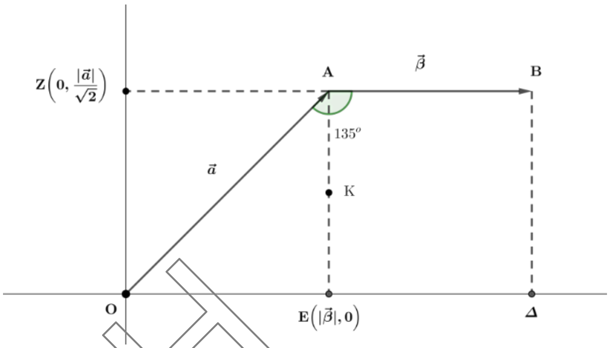
Άρα $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(\sqrt{3}\vec{\beta}+2\sqrt{3}\vec{\alpha}\right)\left(\sqrt{3}\vec{\beta}-2\sqrt{3}\vec{\alpha}\right)=\left(\sqrt{3}\vec{\beta}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\vec{\alpha}\right)^2=12-12=0$

Οπότε τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ είναι κάθετα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Με βάση το διπλανό σχήμα έχουμε:

$$A\left(|\vec{\beta}|,\frac{|\vec{\alpha}|}{\sqrt{2}}\right) \text{ άρα } \overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}=\left(|\vec{\beta}|,\frac{|\vec{\alpha}|}{\sqrt{2}}\right)$$



Ισχύει $(AB)=(OE)=|\vec{\beta}|$ και

$OE//AB$ άρα $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}$ και επειδή $\overrightarrow{OE}=\left(|\vec{\beta}|,0\right)$ άρα $\vec{\beta}=\left(|\vec{\beta}|,0\right)$

Ισχύει: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4 \Leftrightarrow |\vec{\beta}|\cdot|\vec{\beta}|+\frac{|\vec{\alpha}|}{\sqrt{2}}\cdot 0=4 \Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2=4 \Leftrightarrow |\vec{\beta}|=2$

Επίσης $O\hat{A}E = 45°$ άρα το τρίγωνο ΟΑΕ ορθογώνιο και ισοσκελές επομένως

$$(OE)=(AE) \Leftrightarrow |\vec{\beta}|=\frac{|\vec{\alpha}|}{\sqrt{2}} \overset{|\vec{\beta}|=2}{\Leftrightarrow} 2=\frac{|\vec{\alpha}|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|=2\sqrt{2}$$

Άρα $\vec{\alpha}=\left(|\vec{\beta}|,\frac{|\vec{\alpha}|}{\sqrt{2}}\right)=(2,2)$.

Γ2. Για τα σημεία Α και Ε ισχύει $A(2,2)$, $E(2,0)$ και το Κ μέσο του ΑΕ άρα

$$\begin{cases} x_K=\frac{x_A+x_E}{2} \\ y_K=\frac{y_A+y_E}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K=\frac{2+2}{2} \\ y_K=\frac{2+0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K=2 \\ y_K=1 \end{cases}$$

Επομένως $K(2,1)$ άρα $\overrightarrow{OK}=(2,1)$

Για το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε:

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A) \Leftrightarrow (2,0)=(x_B-2,y_B-2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B-2=2 \\ y_B-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=4 \\ y_B=2 \end{cases}$$

Επομένως $B(4,2)$ άρα $\overrightarrow{OB}=(4,2)$

$$\det\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OK}\right)=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4\cdot1-2\cdot2=0 \text{ άρα } \overrightarrow{OB}//\overrightarrow{OK}$$

και Ο κοινό σημείο επομένως τα σημεία O,B,K συνευθειακά.

Γ3. Η ευθεία ΟΑ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{2-0}{2-0}=1$ και επειδή $(\varepsilon_1)\perp OA$ θα ισχύει $\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{OA}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon_1}=-1$.

Οπότε η ευθεία (ε_1) διέρχεται από το σημείο $K(2,1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon_1}=-1$ άρα θα έχει εξίσωση: $y-1=-1(x-2)\Leftrightarrow y=-x+3$.

Γ4. Η ευθεία ΟΑ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$ και διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ άρα έχει εξίσωση $y=x$.

Άρα το συμμετρικό του Κ ως προς την $y=x$ είναι το σημείο $K'(1,2)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για τον άξονα $x'x$ ισχύει: $y=0$ άρα η ευθεία γίνεται:

$$\frac{x}{|\vec{\alpha}|}=1\Leftrightarrow x=|\vec{\alpha}| \text{ επομένως } A\left(|\vec{\alpha}|,0\right)$$

Για τον άξονα $y'y$ ισχύει: $x=0$ άρα η ευθεία γίνεται:

$$-\frac{y}{|\vec{\beta}|}=1\Leftrightarrow y=-|\vec{\beta}| \text{ επομένως } B\left(0,-|\vec{\beta}|\right)$$

Επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές ισχύει

$$(OA)=(OB)\Leftrightarrow|x_A|=|y_B|\Leftrightarrow\left||\vec{\alpha}|\right|=\left|-|\vec{\beta}|\right|\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$$

Δ2. Μ μέσο του ΟΑ άρα

$$x_M=\frac{x_A+x_O}{2}\Leftrightarrow x_M=\frac{|\vec{\alpha}|}{2} \text{ και } y_M=\frac{y_A+y_O}{2}\Leftrightarrow y_M=0 \text{ άρα } M\left(\frac{|\vec{\alpha}|}{2},0\right)$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΒΜ είναι:

$$\lambda_{BM}=\frac{y_M-y_B}{x_M-x_B}=\frac{|\vec{\beta}|}{\frac{|\vec{\alpha}|}{2}}=2 \text{ εφόσον από το } \mathbf{Δ1} \text{ έχουμε ότι } |\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$$

Άρα η ευθεία ΒΜ έχει εξίσωση

$$y-0=2\left(x-\frac{|\vec{\alpha}|}{2}\right)\Leftrightarrow y=2x-|\vec{\alpha}| \text{ ή } y=2x-|\vec{\beta}|$$

Δ3. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του. Θα βρούμε την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Ισχύει: $\lambda_{AB}=\dfrac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}=1$

Έστω (ζ) η μεσοκάθετος τότε $(\zeta)\perp AB\Leftrightarrow \lambda_{AB}\cdot\lambda_\zeta=-1\Leftrightarrow\lambda_\zeta=-1$

Έστω Λ το μέσο του ΑΒ, τότε $\begin{cases} x_\Lambda=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_\Lambda=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_\Lambda=\dfrac{|\vec{\alpha}|}{2} \\ y_\Lambda=-\dfrac{|\vec{\beta}|}{2}\end{cases}$

άρα $\Lambda\left(\dfrac{|\vec{\alpha}|}{2},-\dfrac{|\vec{\beta}|}{2}\right)$ ή $\Lambda\left(\dfrac{|\vec{\alpha}|}{2},-\dfrac{|\vec{\alpha}|}{2}\right)$

Επομένως $(\zeta): y-y_\Lambda=\lambda_\zeta(x-x_\Lambda)\Leftrightarrow y+\dfrac{|\vec{\alpha}|}{2}=-x+\dfrac{|\vec{\alpha}|}{2}\Leftrightarrow y=-x$

Δ4. Η ευθεία $(\eta):(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})x-|\vec{\alpha}|^2y+2019|\vec{\alpha}|^2=0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\eta=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}$

Εφόσον οι ευθείες $(\eta),(\varepsilon)$ είναι κάθετε τότε έχουμε:

$$(\eta)\perp(\varepsilon)\Leftrightarrow\lambda_\eta\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\lambda_\eta=-1\Leftrightarrow\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}=-1\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|^2\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$$