

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η πολυωνμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .

Μονάδες 7

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, με $a < 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
- β)** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln x^2$ είναι το \mathbb{R} .
- γ)** Για κάθε γωνία α ισχύει η σχέση $\sin 2\alpha = \sin^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha$.
- δ)** Αν δύο πολώνυμα είναι δευτέρου βαθμού, τότε και το άθροισμά τους είναι πάντα δευτέρου βαθμού.
- ε)** Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = a^x$ και $g(x) = a^{-x}$, όπου $0 < a \neq 1$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 2x5

A3. Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης Α με τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $f(x) = e^x$	1.
β. $f(x) = e^{-x}$	2.
γ. $f(x) = -e^x$	3.
δ. $f(x) = -e^{-x}$	4.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 + \alpha x^2 + (\beta - 1)x + 7$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

B1. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x=2$ είναι ίση με -7 , τότε να βρείτε τα α, β .

Για $\alpha = 3$ και $\beta = -8$

Μονάδες 6

B2. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 1$ και στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

Μονάδες 5

B4. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = \pi(\pi(x+1)) - 10$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ και $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η g είναι περιττή συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = g(\ln x)$, για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$.

Μονάδες 7

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = g(\ln x)$, για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^2\alpha + 3\eta\mu\alpha + 1 = 0$, $\alpha \in [0, 2\pi]$

Μονάδες 5

Δ2. Αφού αποδείξετε ότι $0 \leq 2\eta\mu\alpha + 2 \leq 4$ στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές της γωνίας α rad, $\alpha \in [0, 2\pi]$, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = (2\eta\mu\alpha + 2)^x$ είναι εκθετική.

Μονάδες 4

Δ3. Έστω ότι η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Αφού δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4^x, x \in \mathbb{R}$,

Μονάδα 1

τότε να λύσετε:

i. την εξίσωση $f(\sin x) + 2f(-\sin x) = f(\log_4 3)$.

Μονάδες 5

ii. την ανίσωση $f(\ln x) + f(2 \ln x) < \ln e^{f\left(\frac{1}{2}\right)}$.

Μονάδες 5

iii. το σύστημα
$$\begin{cases} \log_4 f(x^2) + \log_4 f(y^2) = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$
.

Μονάδες 5