



ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2019

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ Α**

Α1. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 90

Α2. α. ( $\alpha \rightarrow 1$ ) β. ( $\beta \rightarrow 3$ ) γ. ( $\gamma \rightarrow 2$ ) δ. ( $\delta \rightarrow 5$ )

Α3. α. Λάθος β. Σωστό γ. Σωστό δ. Λάθος ε. Λάθος

**ΘΕΜΑ Β**

Β1. α.  $\alpha = \sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{12} + \sqrt{3}}$

$$\alpha = \sqrt{(\sqrt{12} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{3})}$$

$$\alpha = \sqrt{(\sqrt{12})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$\alpha = \sqrt{12 - 3}$$

$$\alpha = \sqrt{9}$$

$$\alpha = 3$$

$$\beta. \beta = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{4}} + \sqrt[3]{27}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{2} + 3}$$

$$\beta = \sqrt{1 + 3}$$

$$\beta = \sqrt{4}$$

$$\beta = 2$$

**B2. α.**  $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \text{άρα } x_1 = 2 \quad \text{ή} \quad x_2 = 1$$

**β.** Έχουμε  $\rho_1 = 1$  και  $\rho_2 = 2$

Συνεπώς  $d(x, \rho_1) = \rho_2$

$$|x - 1| = 2$$

$$x - 1 = 2 \quad \text{ή} \quad x - 1 = -2$$

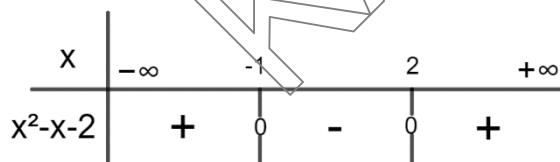
$$x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

**B3.**  $x^2 - x - 2 < 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \text{άρα } x_1 = 2 \quad \text{ή} \quad x_2 = -1$$



$$x \in (-1, 2)$$

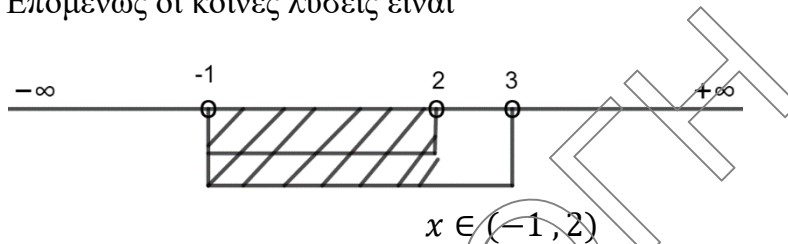
Επίσης έχουμε  $|x - 1| < 2$

$$-2 < x - 1 < 2$$

$$-2 + 1 < x - 1 + 1 < 2 + 1$$

$$-1 < x < 3$$

Επομένως οι κοινές λύσεις είναι



**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1. α.**  $x^2 - (a + 1)x + 2a - 1 = 0$

$$\Delta = [-(a + 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a - 1)$$

$$\Delta = (a + 1)^2 - 4(2a - 1)$$

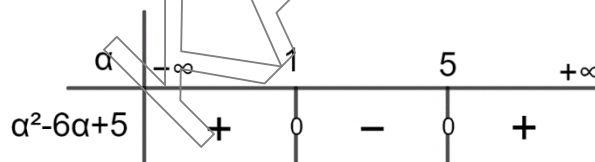
$$\Delta = a^2 + 2a + 1 - 8a + 4$$

$$\Delta = a^2 - 6a + 5$$

**Γ2.** Έχουμε  $a^2 - 6a + 5 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \quad \text{άρα} \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 5$$



Παρατηρούμε ότι όταν  $a \in (1, 5)$  η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική συνεπώς το τριώνυμο διατηρεί πρόσημό ομόσημο του 1.

Άρα όταν  $a \in (1, 5)$  τότε  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Γ3. Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες αντίθετες θα πρέπει:

$\Delta > 0$  δηλαδή  $\alpha \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$  και επίσης

$$S = 0$$

$$-\frac{\beta}{\alpha} = 0$$

$$\frac{-[-(\alpha+1)]}{1} = 0$$

$$\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha = -1$$

Αν  $\alpha = -1$  τότε το τριώνυμο γίνεται

$$f(x) = x^2 - (-1 + 1)x + 2 \cdot (-1) - 1$$

$$f(x) = x^2 - 3$$

Οπότε  $f(x) = 0$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{3}$$

Γ4. Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες πραγματικές και αρνητικές θα πρέπει

$\Delta \geq 0$  δηλαδή  $\alpha \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$  και επίσης

$$S < 0 \quad \text{και} \quad P > 0$$

$$-\frac{\beta}{\alpha} < 0 \quad \frac{\gamma}{\alpha} > 0$$

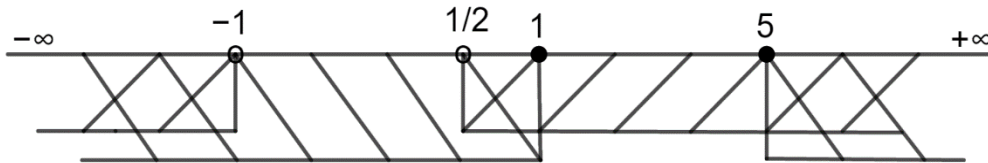
$$\frac{-[-(\alpha+1)]}{1} < 0 \quad \frac{2\alpha-1}{1} > 0$$

$$\alpha + 1 < 0 \quad 2\alpha - 1 > 0$$

$$\alpha < -1 \quad 2\alpha > 1$$

$$\alpha > \frac{1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν κοινές λύσεις



οπότε δεν υπάρχουν τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε το τριώνυμο να έχει δύο ρίζες πραγματικές και αρνητικές.

**ΘΕΜΑ Δ**

- Δ1.** Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης πρέπει  $x \neq 0$  και  $x^2 \neq 0$   
 $x \neq 0$  και  $x \neq 0$

Οπότε η  $f$  ορίζεται στο  $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Επειδή η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $M(1,1)$  έχουμε:

$$f(1) = 1$$

$$1 - \frac{\mu}{1} + \frac{4}{1^2} = 1$$

$$1 - \mu + 4 = 1$$

$$-\mu + 5 = 1$$

$$-\mu = -4$$

$$\mu = 4$$

- Δ2.** Έχουμε  $f(x) = 1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2}$$

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in A$$

$$\text{Ακόμα } |x| \cdot \sqrt{f(x)} = 2$$

$$|x| \cdot \sqrt{\left(\frac{x-2}{x}\right)^2} = 2$$

$$|x| \cdot \frac{|x-2|}{|x|} = 2$$

$$|x-2| = 2$$

$$x-2 = 2 \quad \text{ή} \quad x-2 = -2$$

$$x = 4 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad (\text{Απορρίπτεται})$$

Δ3. Έχουμε  $f(x) = \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$

$$\text{Επομένως } f(1) = \left(\frac{1-2}{1}\right)^2 = \left(\frac{-1}{1}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$f(-1) = \left(\frac{-1-2}{-1}\right)^2 = \left(\frac{-3}{-1}\right)^2 = 3^2 = 9$$

Άρα η ευθεία (ε) γίνεται  $y = x + 9$

Θέτουμε  $y = 0$  άρα  $x = -9$  συνεπώς η ευθεία τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $B(-9,0)$

Θέτουμε  $x = 0$  άρα  $y = 9$  συνεπώς η ευθεία τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $\Gamma(0,9)$

Δ4. Το συμμετρικό του  $M(1,1)$  ως προς τον άξονα  $x'x$  είναι το σημείο  $M_1(1, -1)$

Επειδή η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη με την (ε):  $y = x + 9$  θα έχει την ίδια κλίση με αυτή οπότε θα είναι  $\alpha = 1$ .

Άρα η ζητούμενη ευθεία (ζ) θα είναι της μορφής  $y = x + \beta$  και επειδή διέρχεται από το σημείο  $M_1(1, -1)$  θα ισχύει  $-1 = 1 + \beta$  οπότε θα έχουμε  $\beta = -2$ .

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι (ζ):  $y = x - 2$