ΤΑΞΗ: 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού Βιβλίου Σελ. 86-87 :

Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα στις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον σταθμικό μέσο. Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές βαρύτητας $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$, τότε ο σταθμικός βρίσκεται από τον τύπο :

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \cdots + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$$

Α2. Θεωρία σχολικού Βιβλίου Σελ. 31:

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$.

Έχουμε

$$F(x+h) - F(x) = \left(f(x+h) + g(x+h)\right) - \left(f(x) + g(x)\right) =$$
$$= f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x),$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Άρα $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

Α3. **1.** Λ, **2.** Λ, **3.** Σ, **4.** Σ, **4.** Λ.

Α4.

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[\kappa\cdot f(x)]=\kappa\cdot\ell$.

2. $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

3. $(cf(x))'=c\cdot f'(x)$.

4. $R=x_5-x_1$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η γωνία είναι 90° έχουμε $\frac{\nu_3}{200}\cdot 360^\circ=90^\circ \Leftrightarrow \nu_3=50$ και άρα

$f_3\%=\frac{50}{200}\cdot 100=25\%$.

Ακόμα $f_1\%+f_2\%+f_3\%+f_4\%+f_5\%=100\% \Leftrightarrow f_5\%=100\%-95\%=5\%$.

Άρα ο πίνακας γίνεται

Κλάσεις	κ_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$	$\nu_i\kappa_i$
0-20	10	60	0,30	30	60	0,30	30	600
20-40	30	40	0,20	20	100	0,50	50	1200
40-60	50	50	0,25	25	150	0,75	75	2500
60-80	70	40	0,20	20	190	0,95	95	2800
80-100	90	10	0,05	5	200	1	100	900
Σύνολο		200	1	100				8000

Β2. Το ποσοστό των χρηστών που είναι μέχρι 40 ετών είναι 50%.
Το ποσοστό των χρηστών που είναι από 40 ως 80 ετών είναι
25%+20%=45%.

Β3. Επειδή θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες έχουμε: Το πλήθος των χρηστών από 30 έως 60 είναι :

$$\frac{1}{2}\cdot 40+50=70.$$

Το πλήθος των χρηστών από 50 έως 70 είναι :

$$\frac{1}{2}\cdot 50+\frac{1}{2}\cdot 40=45.$$

Β4. Η μέση τιμή είναι $\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}\kappa_i v_i}{v}=\dfrac{8000}{200}=40.$

Για την διακύμανση έχουμε :

Κλάσεις	κ_i	v_i	$\kappa_i-\overline{x}$	$(\kappa_i-\overline{x})^2$	$v_i(\kappa_i-\overline{x})^2$
0-20	10	60	-30	900	54000
20-40	30	40	-10	100	4000
40-60	50	50	10	100	5000
60-80	70	40	30	900	36000
80-100	90	10	50	2500	25000
Σύνολο		200			124000

Άρα $s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}v_i(\kappa_i-\overline{x})^2}{v}=\dfrac{124000}{200}=620\Rightarrow s=\sqrt{620}\simeq 25$

Τέλος, $CV=\dfrac{s}{\overline{x}}=\dfrac{25}{40}=0,625=62,5\%>10\%$, δηλαδή δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$ και $\sqrt{x+3}-2\neq 0$

Θα λύσουμε την εξίσωση $\sqrt{x+3}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=2$

επειδή και τα δυο μέλη της ισότητας είναι μη αρνητικοί αριθμοί έχουμε διαδοχικά: $\left(\sqrt{x+3}\right)^2=2^2 \Leftrightarrow x+3=4 \Leftrightarrow x=1$. Άρα πρέπει $x\neq 1$

Άρα $\Delta=[-3,1)\cup(1.+\infty)$

Είναι $A=\Delta\cup\{1\}=[-3,+\infty)$

Γ2. Αφού η f διέρχεται από το σημείο Α(6,40) έχουμε $\dfrac{6^2+\lambda\cdot 6-2}{\sqrt{6+3}-2}=40 \Leftrightarrow$

$\dfrac{36+6\lambda-2}{\sqrt{9}-2}=40 \Leftrightarrow \dfrac{34+6\lambda}{3-2}=40 \Leftrightarrow 34+6\lambda=40 \Leftrightarrow 6\lambda=6 \Leftrightarrow \lambda=1$

Γ3. Για $x\in\Delta$ έχουμε $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+3}-2} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{(x^2+x-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{(x^2+x-2)(\sqrt{x+3}+2)}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2} \Leftrightarrow$

παραγοντοποίηση: $x^2+x-2=1\cdot(x-1)(x+2)$

$x^2+x-2=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9 \qquad x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm3}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$

Άρα $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=(x+2)(\sqrt{x+3}+2)$

οπότε $f(x)=\begin{cases}(x+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right), & x\in[-3,1)\cup(1,+\infty)\\ \alpha^2-3\alpha+14, & x=1\end{cases}$

Αφού η f συνεχής στο $x_o=1$ πρέπει $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x+2)(\sqrt{x+3}+2)=3\cdot4=12$

Οπότε,

$a^2-3a+14=12 \Leftrightarrow a^2-3a+2=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1$

$\alpha_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\dfrac{3\pm1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$

Γ4. i. Είναι $f(x)=\begin{cases}(x+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right), & x\in[-3,1)\cup(1,+\infty)\\ 12, & x=1\end{cases}$

Παρατηρούμε ότι από τον πρώτο κλάδο έχουμε f(1)=12. Επομένως

$f(x)=(x+2)(\sqrt{x+3}+2),\ x\geq -3$

Η f τέμνει τον $x\acute{}x$ στο σημείο x_o για το οποίο ισχύει :

$f(x_0)=0 \Leftrightarrow (x_0+2)(\sqrt{x_0+3}+2)=0$

$x_0+2=0$ ή $\sqrt{x_0+3}+2=0$

$x_0=-2$ $\qquad$ $\sqrt{x_0+3}=-2$ Αδύνατη.

Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο (-2,0).

$$f'(x)=[(x+2)(\sqrt{x+3}+2)]'=(x+2)'(\sqrt{x+3}+2)+(x+2)(\sqrt{x+3}+2)'=$$

$$=1\cdot(\sqrt{x+3}+2)+(x+2)\frac{1}{2\sqrt{x+3}}(x+3)'=\sqrt{x+3}+2+\frac{x+2}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f'(-2)=\sqrt{-2+3}+2+\frac{-2+2}{2\sqrt{-2+3}}=\sqrt{1}+2+0=3$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο (-2,0) είναι η :

y – 0 = 3(x – (-2))

y = 3x + 6

ii.

$$g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x+3}+2}+2018=\frac{(x+2)'(\sqrt{x+3}+2)}{\sqrt{x+3}+2}=2018=x+2+2018=x+2020$$

Είναι $g'(x)=1$ για κάθε x $\geq$-3.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g σε οποιοδήποτε σημείο της $x_0\geq$-3 σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία ω τότε : $g'(x_0)=\varepsilon\varphi\omega$

εφω = 1

ω = 45°

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού οι παρατηρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή, έχουμε $\bar{x}=\delta=8$.

Δ2. Θα υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f.

$$f'(x)=(\frac{-x^3}{3})'+(\frac{8x^2}{2})'-(12x)'+(1)'=-x^2+8x-12.$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+8x-12=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta=8^2-4(-1)(-12) \Leftrightarrow \Delta=64-48 \Leftrightarrow \Delta=16$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{16}}{2(-1)} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-8\pm4}{-2}$$

$x_1 = 2$ και $x_2 = 6$

x	$-\infty$ 2	6	$+\infty$
f′(x)	-	+	-
f(x)	↘	↗	↘
	Τ.Ε	Τ.Μ	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,6]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[6,+\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 2$ το :

$$f(2) = -\frac{2^3}{3} + 8\frac{2^2}{2} - 12\cdot 2 + 1 = -\frac{8}{3} + 16 - 24 + 1 = -\frac{8}{3} - 7 = \frac{-8-21}{3} = -\frac{29}{3}$$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 6$ το :

$$f(6) = -\frac{6^3}{3} + 8\frac{6^2}{2} - 12\cdot 6 + 1 = -72 + 144 - 72 + 1 = 1.$$

Άρα s = 2.

Δ3. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα (4,6) που αντιστοιχεί στο $(\bar{x} - 2s,\ \bar{x} + 2s)$ είναι: $\frac{95-68}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5\,\%$

και στο (8,10) αντιστοιχεί το $(\bar{x}\ ,\ \bar{x} + s)$ και είναι: $\frac{68}{2} = 34\,\%$

Οπότε συνολικά 47,5% των παρατηρήσεων βρίσκονται στα δοσμένα διαστήματα.

Το μέγεθος του δείγματος είναι:

$$f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v = \frac{v_i}{f_i} \Leftrightarrow v = \frac{950}{\frac{47{,}5}{100}} = \frac{950}{0{,}475} = 2000$$

Δ4. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα (10,12) που αντιστοιχεί στο $(\bar{x} + s,\ \bar{x} + 2s)$ είναι: $\frac{95-68}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5\,\%$.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι:

$$\frac{13{,}5}{100}\cdot 2000 = 0{,}135\cdot 2000 = 270\,.$$

Δ5. Για να είναι το δείγμα ομοιογενές θα πρέπει $CV\% < 10\% \Rightarrow CV < 0{,}1$

Αν προσθέσουμε την ίδια σταθερά c σε κάθε τιμή μεταβλητής, θα έχουμε:

$s' = s$ και $\bar{x}' = \bar{x} + c$, οπότε:

$$CV < 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s'}{\bar{x}'} < 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}+c} < 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{2}{8+c} < 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{2}{8+c} - 0{,}1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-0{,}8-0{,}1c}{8+c} < 0 \Leftrightarrow \frac{1{,}2-0{,}1c}{8+c} < 0 \overset{8+c>0}{\Leftrightarrow} 1{,}2-0{,}1c < 0 \Leftrightarrow -0{,}1c < -1{,}2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c > \frac{-1{,}2}{-0{,}1} \Leftrightarrow c > 12.$$