**ΤΑΞΗ:** **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**ΜΑΘΗΜΑ:** **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**Ημερομηνία: Σάββατο 14 Απριλίου 2018**
**Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες**

---

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 60 , 61

**Α2.** 1.Λ, 2.Σ, 3. Λ, 4.Λ, 5.Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (3 - 1, 2 - 0) = (2, 2)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

**Β2.** $\overrightarrow{B\Gamma} = (x_\Gamma - x_B, y_\Gamma - y_B) = (x_0 - 3, 0 - 2) = (x_0 - 3, -2)$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0 \Leftrightarrow (2, 2)(x_0 - 3, -2) = 0 \Leftrightarrow$

$2(x_0 - 3) + 2(-2) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 - 6 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x_0 = 10 \Leftrightarrow x_0 = 5$

άρα $\Gamma(5, 0)$

**Β3.** $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \sqrt{(x_\Gamma - x_B)^2 + (y_\Gamma - y_B)^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{AB}|$ και $A\hat{B}\Gamma = 90^o$

άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**Β4.** Έστω $K(x_0, y_0)$

Αφού Γ μέσο ΒΚ ισχύει

$$\left.\begin{aligned} x_\Gamma &= \frac{x_B + x_K}{2} \\ y_\Gamma &= \frac{y_B + y_K}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 5 &= \frac{3 + x_0}{2} \\ 0 &= \frac{2 + y_0}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$x_0 = 7$
$y_0 = -2$
άρα K(7, -2)
$\overrightarrow{AK} = (x_\kappa - x_A, y_\kappa - y_A) = (7 - 1, -2 - 0) = (6, -2)$

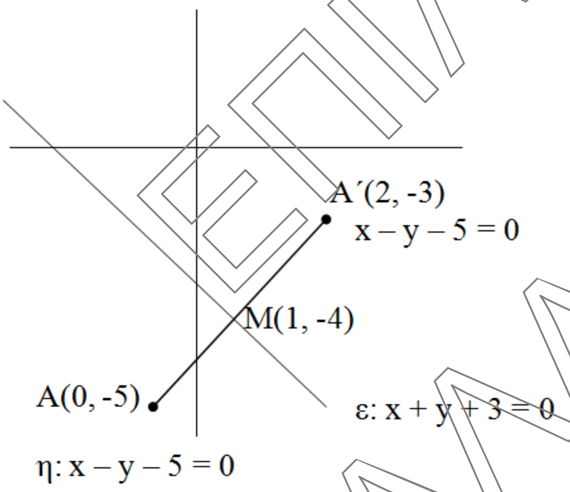
$(ABK) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK})| =$

$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-4-12| = 8$τ.μ.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Αν (η) η ζητούμενη ευθεία τότε έχουμε : $\eta \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow$
$\lambda_\eta = 1$
$\eta: y - y_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y + 5 = 1(x - 0) \Leftrightarrow$
$y = x - 5$

**Γ2.**




$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ y = x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$$

Άρα M(1, -4)

$\frac{x_A + x_A{'}}{2} = x_M \Leftrightarrow x_A{'} = 2\cdot 1 - 0 \Leftrightarrow x_A{'} = 2$

$\frac{y_A + y_A{'}}{2} = y_M \Leftrightarrow y_A{'} = 2\cdot(-4) + 5 \Leftrightarrow y_A{'} = -3$

άρα A΄(2, -3)

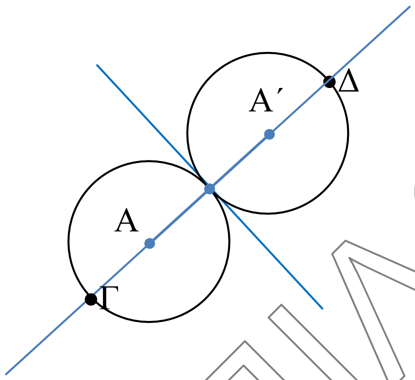
**Γ3.** $d(A, \varepsilon) = \dfrac{|10 + 1\cdot(-5) + 3|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$C: (x - 0)^2 + (y + 5)^2 = \sqrt{2}^2$

$C΄: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \sqrt{2}^2$

(ή β΄ τρόπος: $\overrightarrow{AM} = \rho \Leftrightarrow \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \rho$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-0)^2 + (-4+5)^2} = \rho \Leftrightarrow \rho = \sqrt{2}$ )



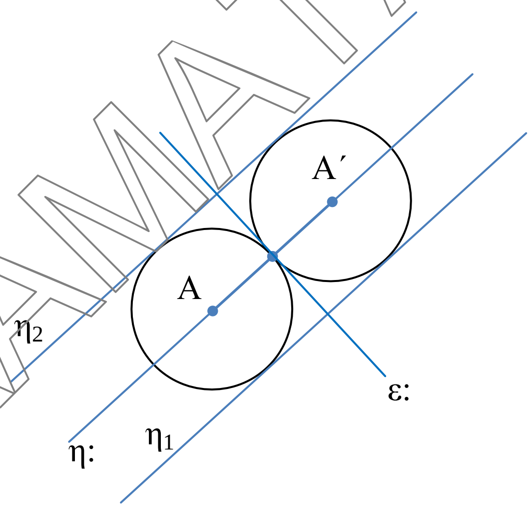

Η μέγιστη απόσταση είναι
$(\Gamma\Delta) = (AA΄) + \rho + \rho = 4\rho = 4\sqrt{2}$ μ.

**Γ4.** Έστω $Z(x, y)$ σημείο της $\eta_1$

$d(Z, \eta) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|x - y - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$|x - y - 5| = 2 \Leftrightarrow$ $x - y - 5 = 2$
ή $x - y - 5 = -2$
$x - y - 7 = 0$
ή $x - y - 3 = 0$

άρα οι κοινές εφαπτομένες είναι:
x-y-7=0 , x-y-3=0 και η (ε).




## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**

**i.** $A = -2$, $B = 4$, $\Gamma = 1$

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4 + 16 - 4 = 16 > 0$

παριστάνει κύκλο $K(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2})$ ή $K(1, -2)$

$\rho = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \dfrac{\sqrt{16}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

**ii.** Για να παριστάνει ευθεία πρέπει $2\lambda + 1 \neq 0$ ή $1 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -\frac{1}{2}$ ή $\lambda \neq 1$

Ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Για $\left.\begin{array}{l}\lambda = 0 : x + y + 3 = 0\\ \lambda = 1 : 3x + 3 = 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2\\ x = -1\end{array}\right.$

για $x = -1$, $y = -2$

$(2\lambda + 1)(-1) + (1 - \lambda)(-2) + 3 = 0$

$-2\lambda - 1 - 2 + 2\lambda + 3 = 0$

$0 = 0$ ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

άρα η ε παριστάνει άπειρες ευθείες που διέρχονται από το Τ(-1, -2)

**Δ2.** Αρκεί να δείξουμε ότι

$$d(K, \varepsilon) < \rho \Leftrightarrow \frac{|(2\lambda+1)\cdot 1 + (1-\lambda)(-2) + 3|}{\sqrt{(2\lambda+1)^2 + (1-\lambda)^2}} < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2\lambda + 1 - 2 + 2\lambda + 3|}{\sqrt{(2\lambda+1)^2 + (1-\lambda)^2}} < 2 \Leftrightarrow$$

$$|4\lambda + 2| < 2\sqrt{(2\lambda+1)^2 + (1-\lambda)^2}$$

$$|2\lambda + 1| < \sqrt{(2\lambda+1)^2 + (1-\lambda)^2} \Leftrightarrow$$

$(1 - \lambda)^2 > 0$ ισχύει για κάθε $\lambda \neq 1$

**Δ3.** Εφαρμόζουμε Π.Θ. στο $K\overset{\Delta}{M}T$

$(KT)^2 = (KM)^2 + (MT)^2$

$2^2 = (KM)^2 + \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow$

$(KM)^2 = 2$

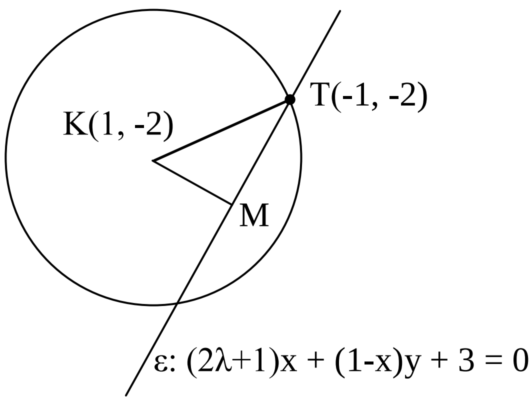
$(KM) = \sqrt{2}$

$d(K, \varepsilon) = (KM) \Leftrightarrow$

$$\frac{|(2\lambda+1)\cdot 1 + (1-\lambda)(-2) + 3|}{\sqrt{(2\lambda+1)^2 + (1-\lambda)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

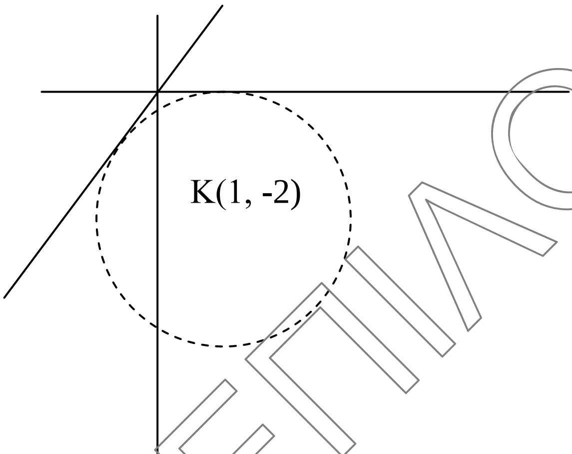
$$\frac{|2\lambda + 1 - 2 + 2\lambda + 3|}{\sqrt{4\lambda^2 + 4\lambda + 1 - 2\lambda + \lambda^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$|4\lambda + 2| = \sqrt{2}\ \sqrt{5\lambda^2 + 2\lambda + 2} \Leftrightarrow$$



$(4\lambda + 2)^2 = (\sqrt{2}\ \sqrt{5\lambda^2 + 2\lambda + 2}\,)^2 \Leftrightarrow$
$16\lambda^2 + 16\lambda + 4 = 2(5\lambda^2 + 2\lambda + 2) \Leftrightarrow$
$16\lambda^2 + 16\lambda + 4 = 10\lambda^2 + 4\lambda + 4 \Leftrightarrow$
$6\lambda^2 + 12\lambda = 0 \Leftrightarrow$
$\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow$
$\lambda(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow$
$\lambda = 0$ ή $\lambda = -2$

**Δ4.**






Έστω $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ ή $x = x_0$ η εξίσωση της εφαπτομένης αφού διέρχεται από το O(0, 0) ισχύει
$y = \lambda x$ ή $x = 0$
Για την $y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 1 - 1(-2)|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow |\lambda + 2| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$|\lambda + 2|^2 = (2\sqrt{\lambda^2 + 1}\,)^2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 4\lambda^2 + 4 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(3\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = \frac{4}{3}$$

$\varepsilon_1: y = 0$ ή $\varepsilon_2: y = \frac{4}{3}x$

Για την $x = 0$:
$d(K, \varepsilon) = 1 < \rho$ απορρίπτεται
$\varepsilon_1 // \vec{\delta_1} = (1, 0)$
$\varepsilon_2 // \vec{\delta_2} = (3, 4)$

$$\text{συν}\,(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \text{συν}\,(\widehat{\vec{\delta_1}, \vec{\delta_2}}) = \frac{\vec{\delta_1}\,\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\,|\vec{\delta_2}|} =$$

$$\frac{(1,0)(3,4)}{\sqrt{1^2+0^2}\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}$$