

**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
 / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 1 Απριλίου 2012

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(9 μονάδες)

**A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_1 \in A$ ;

(3 μονάδες)

**A3.** Τι μας δίνουν τα μέτρα θέσης και τι τα μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας μιας κατανομής ενός συνόλου δεδομένων;

(3 μονάδες)

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η αθροιστική συχνότητα  $N_i$  μιας τιμής  $x_i$  εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες της τιμής  $x_i$ .

**β)** Αν  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  τότε η συνάρτηση  $f(x)$  δεν παρουσιάζει ακρότατα.

**γ)** Σε μια κανονική κατανομή το 0,3% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται εκτός του διαστήματος  $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ .

**δ)** Αν η διάμεσος  $v$  παρατηρήσεων είναι ίση με μία από αυτές τότε είναι βέβαιο ότι το πλήθος  $n$  των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός.

**ε)** Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε οι εκφράσεις «Δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A και B» και «Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B» είναι ισοδύναμες.

(2X5 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Β

Εξετάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα συνταξιούχων ως προς το ποσό της μηνιαίας συνολικής σύνταξης που λαμβάνουν σε εκατοντάδες ευρώ. Για την κατανομή τους έχουν δημιουργηθεί 5 ισοπλατείς κλάσεις και γνωρίζουμε ότι:

- το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων  $v_i$  είναι 250.
- το μέσο της άνω βάσης του ορθογωνίου του ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων  $f_i\%$ , που αντιστοιχεί στη 2<sup>η</sup> κλάση είναι το σημείο  $A(10, \alpha)$ .
- Το εύρος των παρατηρήσεων είναι 20.
- Η συχνότητα  $f_1\%$  είναι τριπλάσια της  $f_2\%$  και δεκαπλάσια της  $f_4\%$ , ενώ η  $f_2\%$  είναι διπλάσια της  $f_3\%$  και πενταπλάσια της  $f_5\%$ .

**B1.** Να δείξετε ότι  $\alpha=20$  και να συμπληρωθεί ο πίνακας κατανομής όλων των συχνοτήτων.

(8 μονάδες)

**B2.** Να υπολογιστεί η μέση τιμή, καθώς και η διάμεσος των συντάξεων. Τί είδους ασυμμετρία έχει η κατανομή;

(6 μονάδες)

**B3.** Αν η κυβέρνηση αποφασίσει μείωση των συντάξεων που υπερβαίνουν τα 1300 ευρώ, βρείτε το ποσοστό των θιγόμενων συνταξιούχων καθώς και να εκτιμήσετε το πλήθος τους αν γνωρίζουμε ότι ο συνολικός αριθμός συνταξιούχων της χώρας είναι 2.850.000.

(5 μονάδες)

**B4.** Αν δοθεί επίδομα στους έχοντες συνολικό ετήσιο εισόδημα (από συντάξεις 12 μηνών) μικρότερο ή ίσο των 8.640 ευρώ τότε:

i. Επιλέγοντας τυχαία από το δείγμα έναν συνταξιούχο, να βρεθεί η πιθανότητα να λάβει το επίδομα.

(3 μονάδες)

ii. Αν το επίδομα δοθεί από τα χρήματα, που θα εξοικονομήσουν τα ταμεία αφαιρώντας 100 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της 3<sup>ης</sup> κλάσης, 200 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της 4<sup>ης</sup> και 400 ευρώ από καθέναν της 5<sup>ης</sup> κλάσης και τα οποία μοιραστούν εξίσου στους δικαιούχους, τότε να βρεθεί το ποσό που αναμένεται να λάβει ανά μήνα ο κάθε δικαιούχος.

(3 μονάδες)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{3\sqrt{x}-6}{x-4}$  και  $g(x) = 2P(B) \cdot \ln x + \sqrt{x} + \frac{1}{16}x^2$  και τα A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ .

Γ1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f(x)$  και  $g(x)$ . (4 μονάδες)

Γ2. Αν η πιθανότητα  $P(A)$  του ενδεχομένου A του δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι ίση με το  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $g(x)$  στο  $x_0=4$  σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{\pi}{4}$ , τότε να βρείτε τις πιθανότητες  $P(A)$  και  $P(B)$ . (8 μονάδες)

Γ3. Αν  $P(A) = \frac{3}{4}$  και  $P(B) = \frac{1}{2}$  και  $P(A \cap B) \in \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6} \right\}$  τότε:

α) Να δείξετε ότι  $P(A \cup B) = \frac{2}{5}$ . (5 μονάδες)

β) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A ή να μην πραγματοποιηθεί το B. (4 μονάδες)

γ) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B. (4 μονάδες)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(6 μονάδες)

Δ2. Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A, B δύο ενδεχόμενα για τα οποία ισχύει:

$$f(P(B)) = P(A), \text{ όπου } f(x) \text{ η προηγούμενη συνάρτηση.}$$

i. Να αποδείξετε ότι το A είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το B είναι αδύνατο ενδεχόμενο.

(7 μονάδες)

- ii. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας απόλυτων συχνοτήτων  $v_i$  και τα ενδεχόμενα  $\Gamma, \Delta$  του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ , διαφορετικά των  $A$  και  $B$  με  $\Gamma \subseteq \Delta$  και  $\Gamma \neq \Delta$ .

$x_i$	$v_i$
1	$2P(\Gamma)$
2	$4P(\Delta)$
3	$4P(\Gamma)+4P(\Delta)$
4	$P(A)$
<b>Σύνολα</b>	

- α) Να αποδείξετε ότι  $v_1=1$  και  $v_2=3$  και να συμπληρωθεί ο πίνακας.  
(6 μονάδες)
- β) Να υπολογιστεί η διάμεσος των παρατηρήσεων.  
(3 μονάδες)
- γ) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:  
 $P(\Gamma \cap \Delta)$ ,  $P(\Gamma \cup \Delta)$   
(3 μονάδες)