Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0=0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

(8 Μόρια)

Α.2. Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1,\theta_2>0$ να γράψετε τα αναπτύγματα των τύπων $\log_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)$ και $\log_\alpha(\theta_1\theta_2)$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

(2 Μόρια)

Α.3. Τι γνωρίζετε για την μονοτονία της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$.

(3 Μόρια)

Α.4. Να γράψετε στο τετράδιό σας για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση .

α. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1453}{2011}\eta\mu(2x)$ έχει περίοδο :

Α: $T=\pi+\frac{\pi}{4}$ **Β:** $T=\pi$ **Γ:** $T=-2\pi$

Δ: $T=\frac{\pi}{2}$ **Ε:** $T=\frac{1453}{2011}$

(2 Μόρια)

β. Το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου

$$P(x)=\left(x^4-3x^2+2x\right)^{15}-x^5+4x$$ είναι :

Α: $2^{15}+4$ **Β:** 1 **Γ:** 3

Δ: 5 **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα.

(2 Μόρια)

γ. Αν S_ν συμβολίζει το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ και πρώτο όρο α_1 , τότε είναι :

Α: $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda - 1}{\lambda^\nu - 1}$ **Β:** $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ **Γ:** $S_\nu = \dfrac{\alpha_1 \lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

Δ: $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{1 - \lambda^\nu}{\lambda - 1}$ **Ε:** κανένα από τα προηγούμενα

(2 Μόρια)

Α.5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Κάθε σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

(2 Μόρια)

β. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \dfrac{2}{\pi}$.

(2 Μόρια)

γ. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha^x \beta^x$ όπου $\alpha > 0$, $\beta > 0$ με $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όταν $\alpha < \dfrac{1}{\beta}$.

(2 Μόρια)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\beta x}{2}\right)$ (1) , όπου $\beta < 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0, \beta + 5)$, και $B\left(\dfrac{4\pi}{\beta}, 4\beta^2\right)$ τότε:

Β.1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -1$.

(7 Μόρια)

Β.2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία y=4 στο διάστημα $[0, 12\pi]$.

(7 Μόρια)

Β.3. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f καθώς και την περίοδό της.

(6 Μόρια)

Β.4. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $A = f(4\pi) - f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ και

$$B = 3f(0)\frac{f(0)^{2010} - 1}{f(0) - 1} + 4$$

(5 Μόρια)

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3-7x^2+\beta x+2$, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν η διαίρεση του $P(x)$ δια $x-1$ δίνει υπόλοιπο 1 και η αριθμητική τιμή του για $x=-2$ είναι 10, τότε:

Γ.1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(7 Μόρια)

Γ.2. Για τις τιμές $\alpha = -5$ και $\beta = 10$,

α. Να βρείτε το πηλίκο Π(x) της διαίρεσης του P(x) δια του $Q(x)=x^3+x^2-2x$ και να γράψετε το P(x) με την βοήθεια της ταυτότητας ευκλείδειας διαίρεσης.

(6 Μόρια)

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=\upsilon(x)$, όπου υ(x) το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) δια $Q(x)$.

(7 Μόρια)

γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης Q(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

(5 Μόρια)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\dfrac{4-x}{4+x}\right)$.

Δ.1. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(5 Μόρια)

Δ.2. Να υπολογίσετε η τιμή της παράστασης

$$A = f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

(6 Μόρια)

Δ.3. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - f(-x) < -2\ln 3$.

(7 Μόρια)

Δ.4. Να λύσετε την εξίσωση $e^{2f(x)} + 3 = 4e^{f(x)}$.

(7 Μόρια)