



ΕΠΑ.Λ. Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Σχολικό βιβλίο σελ.334.

B.1. σελ. 213.

B.2. σελ. 212.

Γ. α - Λ

β - Σ

γ - Λ

δ - Λ

ε - Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Έχουμε $z = \frac{1+2w}{1-w} \quad (w \neq 1) \Leftrightarrow z(1-w) = 1+2w \Leftrightarrow z - zw = 1+2w \Leftrightarrow$

$$2w + zw = z - 1 \Leftrightarrow w(2+z) = z - 1 \Leftrightarrow$$

$$w = \frac{z-1}{z+2} \quad (z \neq -2) \Leftrightarrow w + 1 = \frac{z-1}{z+2} + 1 \Leftrightarrow$$

$$w + 1 = \frac{z-1+z+2}{z+2} = \frac{2z+1}{z+2}.$$

Από την υπόθεση $|w+1|=1$.

Άρα

$$|w+1| = \left| \frac{2z+1}{z+2} \right| = 1 \Leftrightarrow |2z+1| = |z+2| \Leftrightarrow$$

$$|2z+1|^2 = |z+2|^2 \Leftrightarrow (2z+1)(2\bar{z}+1) = (z+2)(\bar{z}+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + 1 = z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + 4 \Leftrightarrow 3|z|^2 = 3 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

β) i) Έχουμε $|z_1|=1 \Leftrightarrow |z_1|^2=1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=1 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}, \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}, \bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$

Επειδή $z \in R \Leftrightarrow z = \bar{z}$ (Πρέπει να αποδειχθεί) αρκεί να δείξουμε ότι $\bar{\alpha} = \alpha$.

Οπότε

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_3}\right)} + \overline{\left(\frac{z_2+z_3}{z_1}\right)} + \overline{\left(\frac{z_1+z_3}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_2} = \\ &= \frac{1}{\frac{z_3}{z_1}} + \frac{1}{\frac{z_3}{z_2}} + \frac{1}{\frac{z_1}{z_2}} + \frac{1}{\frac{z_1}{z_3}} + \frac{1}{\frac{z_2}{z_3}} + \frac{1}{\frac{z_2}{z_1}} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_2} = \\ &= \frac{z_1+z_2}{z_3} + \frac{z_2+z_3}{z_1} + \frac{z_1+z_3}{z_2} = \alpha \end{aligned}$$

ii) Έχουμε $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1+z_2+z_3}{z_2+z_3+z_1}\right) = \frac{\left(\frac{z_1+z_2+z_3}{z_2+z_3+z_1}\right) + \left(\frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3}{\bar{z}_2+\bar{z}_3+\bar{z}_1}\right)}{2} =$

$$\frac{\frac{z_1+z_2+z_3}{z_2+z_3+z_1} + \frac{z_1+z_2+z_3}{z_2+z_3+z_1}}{2} = \frac{2(z_1+z_2+z_3)}{2(z_2+z_3+z_1)} = \frac{z_1+z_2+z_3}{z_2+z_3+z_1} = \frac{z_1+z_2+z_3}{z_1+z_2+z_3} = 1$$

γ) **1ος Τρόπος**

Έχουμε

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|3(-1) + 4 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

Οπότε

Ελάχιστη απόσταση είναι:

$$(AM) = d(K, \varepsilon) - \rho = 3 - 1 = 2 \text{ και}$$

$$\text{μέγιστη } (BM) = d(K, \varepsilon) + \rho = 3 + 1 = 4.$$

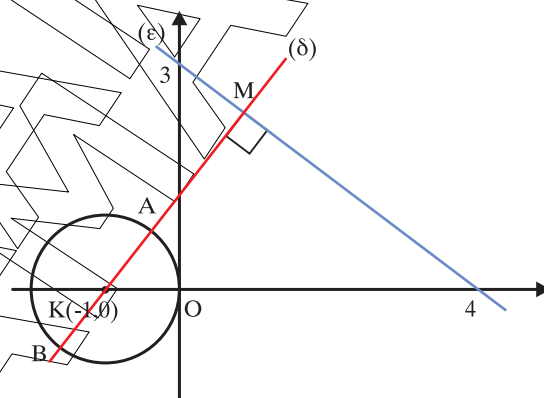
2ος Τρόπος

Έχουμε $(\varepsilon) \perp (\delta) \Leftrightarrow \lambda_\delta = \frac{4}{3}$. Άρα $(\delta): y = \frac{4}{3}(x+1) \Leftrightarrow 4x - 3y + 4 = 0$. Για να

βρούμε το M λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ 4x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right) \text{ άρα } M\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

$$(KM) = \sqrt{\left(\frac{4}{5} + 1\right)^2 + \left(\frac{12}{5} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{25}} = 3$$



Οπότε

Ελάχιστη απόσταση είναι: $(AM) = (KM) - \rho = 3 - 1 = 2$ και

μέγιστη $(BM) = (KM) + \rho = 3 + 1 = 4$.

ΘΕΜΑ 3^ο

α) Είναι $g(x) = e^x + x$ (1). Τότε $g'(x) = e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Άρα η συνάρτηση g είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα.

β) Έχουμε

$$xf'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1} \Leftrightarrow xf'(x)(e^{f(x)}+1) = x+1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{f(x)} + f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow (e^{f(x)} + f(x))' = (x + \ln x)' \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x + c.$$

Για $x = 1$ έχουμε $e^{f(1)} + f(1) = 1 + c$ με $c = 0$. Άρα

$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x = e^{\ln x} + \ln x$ και λόγω της (1) έχουμε

$g(f(x)) = g(\ln x)$. Αλλά η g είναι 1-1. Άρα $f(x) = \ln x$.

γ) Είναι $h(x) = \frac{f(x)-1}{x}$.

$$\text{Τότε } h'(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x - 1)}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2}.$$

$$\text{Αν } h'(x) = 0 \text{ ή } 2 - \ln x = 0 \text{ ή } \ln x = 2 \text{ ή } x = e^2$$

x	0	e^2	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$			

Η h είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (0, e^2]$

Η h είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [e^2, +\infty)$

$$\text{Έχουμε } h_{\max} = h(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{e^2} = \frac{1}{e^2}$$

Πεδίο τιμών :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (\ln x - 1) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$h(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), h(e^2) \right] \cup \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(e^2) \right] = \left(-\infty, \frac{1}{e^2} \right] \cup \left(0, \frac{1}{e^2} \right] = \left(-\infty, \frac{1}{e^2} \right].$$

δ) Έχουμε $\left(\frac{\eta\mu x}{e} \right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e} \right)^{\eta\mu x}$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ ισχύει $\frac{\eta\mu x}{e} > 0, \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e} > 0$

Λογαριθμίζουμε τη σχέση και έχουμε:

$$\ln \left(\frac{\eta\mu x}{e} \right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \ln \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e} \right)^{\eta\mu x} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln \left(\frac{\eta\mu x}{e} \right) = \eta\mu x \cdot \ln \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e} \right) \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x \cdot (\ln(\eta\mu x) - \ln e) = \eta\mu x \cdot (\ln(\sigma\upsilon\nu x) - \ln e) \Leftrightarrow \frac{\ln(\eta\mu x) - 1}{\eta\mu x} = \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x) - 1}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(\eta\mu x) = h(\sigma\upsilon\nu x) \quad (2)$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ ισχύουν οι σχέσεις $0 < \eta\mu x < 1, 0 < \sigma\upsilon\nu x < 1$ και $(0,1) \subset (0, e^2)$.

Η h είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e^2]$. Από τη (2) έχουμε

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \text{ ή } \epsilon\phi x = 1 \text{ ή } x = \frac{\pi}{4}.$$

ε) Έχουμε $h'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$ και

$$h''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot (2 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 4x + 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x(2 \ln x - 5)}{x^4} = \frac{2 \ln x - 5}{x^3}.$$

$$h''(x) = 0 \text{ ή } 2 \ln x - 5 = 0 \text{ ή } \ln x = \frac{5}{2} \text{ ή } x = e^{\frac{5}{2}}.$$

x	0	$e^{5/2}$	$+\infty$
$h''(x)$	-	0	+
$h'(x)$	\nearrow		\searrow

Η h είναι κοίλη στο διάστημα $(0, e^{5/2}]$.

Η h είναι κυρτή στο διάστημα $[e^{5/2}, +\infty)$.

$$h'_{\min}(e^{5/2}) = \frac{2 - \ln e^{5/2}}{(e^{5/2})^2} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{e^5} = -\frac{1}{2e^5}.$$

Τότε $h'(x) \geq -\frac{1}{2e^5}$ για κάθε $x > 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως πηλίκο παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με $h'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$. Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (x_1, x_2) \text{ ώστε } h'(\xi) = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (3)$$

Αλλά για κάθε $x > 0$ επομένως και για το $\xi > 0$ ισχύει $h'(\xi) \geq -\frac{1}{2e^5}$ (4).

$$\text{Από τις (3) και (4) έχουμε } \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{1}{2e^5}.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \int_3^x \left(\int_1^u f(t) dt \right) du - 2x + 6 \geq 0$.

Έχουμε $g(3) = 0$. Τότε $g(x) \geq g(3)$ και η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$.

Από το Θεώρημα Fermat ισχύει $g'(3) = 0$. Αλλά $g'(x) = \int_1^x f(t) dt - 2$

$$\text{και για } x = 3 \text{ έχουμε } g'(3) = \int_1^3 f(t) dt - 2 = 0 \text{ ή } \int_1^3 f(t) dt = 2.$$

β) Για $x = 0$ και $y = f(0)$ έχουμε $4 \cdot 0 + f(0) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 3$ και $f'(0) = -4$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 f(t) dt - x^3}{x^4} &\stackrel{DHL}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x t^2 f(t) dt - x^3 \right)'}{(x^4)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 3x^2}{4x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{4} \cdot f'(0) = \frac{-4}{4} = -1. \end{aligned}$$

γ) **1^{ος} Τρόπος**

Για κάθε $x > 1$ η ανίσωση γίνεται:

$$(x-1)h'(x) > h(x) \Leftrightarrow (x-1)h'(x) - h(x) > 0$$

Θέτουμε $K(x) = (x-1)h'(x) - h(x) = (x-1)f(x) - h(x)$ για $x \in [1, +\infty)$.

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} K'(x) &= f(x) + (x-1)f'(x) - h'(x) = f(x) + (x-1)f'(x) - f(x) = \\ &= (x-1)f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 1. \end{aligned}$$

Άρα η K είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ αφού είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$.

$$\text{Επομένως } x > 1 \Leftrightarrow K(x) > K(1) \Leftrightarrow (x-1)h'(x) - h(x) > 0.$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(u) = \int_1^u f(t)dt$, $u \in [1, x]$.

Η h είναι συνεχής στο $[1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$ με $h'(u) = f(u)$.

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x)$ ώστε $h'(\xi) = \frac{h(x) - h(1)}{x - 1}$.

Αλλά $h(1) = \int_1^1 f(t)dt = 0$ οπότε $h'(\xi) = \frac{h(x)}{x-1}$ (1). Επίσης $h'(x) = f(x)$

και $h''(x) = f'(x) > 0$. Άρα η h' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \geq 1$ και για $\xi < x$ έχουμε $h'(\xi) < h'(x)$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε

$$h'(x) > \frac{h(x)}{x-1}.$$

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = \int_1^x f(t)dt + 3x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Η φ είναι συνεχής στο $[1, 3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x) = f(x) + 3 - 2x$.

$$\left. \begin{aligned} \varphi(1) &= 2 \\ \varphi(3) &= \int_1^3 f(t)dt + 9 - 9 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi(1) = \varphi(3)$$

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ ώστε

$$\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + 3 - 2\xi = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + 3 = 2\xi.$$