



ΕΠΑ.Λ. Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a).$$

(Μονάδες 10)

B.1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

(Μονάδες 3)

B.2. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του παράγωγου αριθμού στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 2)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $z_1^2 + z_2^2 = 0$ και $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ αναγκαστικά $z_1 = z_2 = 0$.

β) Αν $g(x) \neq \alpha$ κοντά στο x_0 με $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha$ και $\lim_{y \rightarrow \alpha} f(y) = l$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = l.$$

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και $f(\beta)$ μέγιστη τιμή της συνάρτησης, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f'(\beta) = 0$.

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ , τότε $f''(x) > 0$.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, 5]$ και $f(x) \leq 0$ στο $[2, 5]$,

τότε
$$\int_2^5 f(x) dx \geq 0.$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Οι μιγαδικοί αριθμοί z , w συνδέονται με τη σχέση $z = \frac{1+2w}{1-w}$ και η εικόνα του w ανήκει στον κύκλο με κέντρο $K(-1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

α) Να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $|z|=1$ (1) και z_1, z_2, z_3 οι εικόνες τριών μιγαδικών αριθμών για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) να δείξετε ότι:

i) Ο αριθμός $\alpha = \frac{z_1+z_2}{z_3} + \frac{z_2+z_3}{z_1} + \frac{z_1+z_3}{z_2}$ είναι πραγματικός.

(Μονάδες 7)

ii) Αν επιπλέον $z_1+z_2+z_3=0$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) = -\frac{3}{2}$$

(Μονάδες 7)

γ) Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): 3x+4y-12=0$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων του μιγαδικού w από την ευθεία (ε) .

(Μονάδες 5)**ΘΕΜΑ 3^ο**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x > 0$ ισχύουν $x f'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1}$ και $f(1)=0$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^x + x$ είναι 1-1.

(Μονάδες 2)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)-1}{x}$ ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$ αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
(Μονάδες 5)

ε) Να εξετασθεί η h ως προς κυρτότητα και να δείξετε ότι για κάθε x_1, x_2 με $x_2 > x_1 > 0$ ισχύει $\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{1}{2e^5}$.
(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$\int_3^x \left(\int_1^u f(t) dt \right) du \geq 2x - 6 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) $\int_1^3 f(t) dt = 2$.

(Μονάδες 7)

β) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι η ευθεία $4x + y - 3 = 0$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 f(t) dt - x^3}{x^4}$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν για κάθε $x \geq 1$ ισχύει $f'(x) > 0$ και $h(x) = \int_1^x f(t) dt$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $h'(x) > \frac{h(x)}{x-1}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) + 3 = 2\xi$.

(Μονάδες 6)