



Β' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Σελίδα 43 Σχολικού Βιβλίου.
B. Σελίδα 89 Σχολικού Βιβλίου.
Γ. α) Λάθος
 β) Σωστό
 γ) Σωστό
 δ) Λάθος
 ε) Λάθος

ΘΕΜΑ 2^ο

- α.** Τα διανύσματα \vec{AB} , \vec{BG} έχουν συντεταγμένες:
 $\vec{AB} = (-1+5, -2-3) = (4, -5)$ και $\vec{BG} = (4+1, 2+2) = (5, 4)$.
 Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι $\vec{AB} \cdot \vec{BG} = 4 \cdot 5 + (-5) \cdot 4 = 20 - 20 = 0$,
 επομένως τα διανύσματα \vec{AB} , \vec{BG} είναι κάθετα.

- β.** Πρώτος τρόπος
 Το διάνυσμα \vec{AG} έχει συντεταγμένες $\vec{AG} = (4+5, 2-3) = (9, -1)$.
 Η ορίζουσα των διανυσμάτων \vec{AB} , \vec{AG} είναι:

$$\det(\vec{AB}, \vec{AG}) = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 4(-1) - 9(-5) = -4 + 45 = 41$$

Το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle ABG$ είναι:

$$(\triangle ABG) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AG})| = \frac{1}{2} |41| = \frac{41}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δεύτερος τρόπος :

Αφού $\vec{AB} \perp \vec{BG}$, το τρίγωνο $\triangle ABG$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή B , άρα το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle ABG$ είναι:

$$(\triangle ABG) = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{BG}| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-5)^2} \sqrt{5^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{41} \sqrt{41} = \frac{41}{2} \text{ τ.μ.}$$

- γ.** Πρώτος τρόπος :

Τα μέτρα των διανυσμάτων \vec{AB} , \vec{AG} είναι αντίστοιχα:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41} \text{ και } |\vec{AG}| = \sqrt{9^2 + (-1)^2} = \sqrt{82} = \sqrt{2} \sqrt{41}$$

Το συνημίτιο της γωνίας φ είναι:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AG}}{|\vec{AB}| |\vec{AG}|} = \frac{4 \cdot 9 + (-5) \cdot (-1)}{\sqrt{2} \sqrt{41} \sqrt{41}} = \frac{41}{41 \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως, $\varphi = 45^\circ$, επειδή $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$.

Δεύτερος τρόπος:

$\vec{AB} \perp \vec{BG}$ και $|\vec{AB}| = |\vec{BG}| = \sqrt{41}$, άρα το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε συμπεραίνουμε ότι $\varphi = 45^\circ$.

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Η (1) ισοδυναμεί με την εξίσωση: $(1 + \kappa)x + (1 - \kappa)y + (1 - 5\kappa) = 0$.

Οι συντελεστές των x, y δεν μηδενίζονται για την ίδια τιμή του κ .

Πράγματι, ο συντελεστής του x μηδενίζεται για $\kappa = -1$, ενώ ο συντελεστής του y μηδενίζεται για $\kappa = 1$.

Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

β. Θέτουμε στην (1), $x = 2$ και $y = -3$, οπότε προκύπτει:

$$0 + \kappa \cdot 0 = 0, \text{ που ισχύει για κάθε } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Άρα όλες οι ευθείες που παριστάνει η (1), διέρχονται από το $A(2, -3)$.

γ. $(1 + \kappa)x + (1 - \kappa)y + (1 - 5\kappa) = 0$.

Η εξίσωση παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $x'x$, αν $\begin{cases} 1 + \kappa \neq 0 \\ 1 - \kappa = 0 \end{cases}$, άρα, $\kappa = 1$.

Η (1) για $\kappa = 1$, γίνεται: $2x - 4 = 0$ ή $x = 2$.

δ. K είναι η προβολή του A στον $x'x$, άρα $x_0 = 2$. Έχουμε $K(2, 0)$, άρα $E(-2, 0)$ Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η παραβολή C , με εστία $E(-2, 0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\varepsilon: x = 2$.

$$\left(\frac{p}{2} = -2 \Leftrightarrow p = -4, \text{ άρα η παραβολή έχει εξίσωση } C: y^2 = -8x$$

Η εξίσωση της παραβολής, δεν είναι απαραίτητο, να βρεθεί.)

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Στην εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda + 4)x + \lambda y + 2\lambda = 0$ έχουμε:

$$A = -(\lambda + 4), B = \lambda, \Gamma = 2\lambda, \text{ οπότε:}$$

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda + 4)^2 + \lambda^2 - 8\lambda = 2(\lambda^2 + 8) > 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και επομένως η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή της παραμέτρου λ . Για το κέντρο K και την ακτίνα R του κύκλου ισχύουν:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ και } R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}, \text{ επομένως } K\left(\frac{\lambda + 4}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right) \text{ και}$$

$$R = \frac{\sqrt{2(\lambda^2 + 8)}}{2}.$$

β. Έστω $K(x, y)$ το κέντρο του κύκλου (1), τότε (από α ερώτημα):

$$x = \frac{\lambda + 4}{2} \text{ και } y = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν το σύστημα } \begin{cases} x = \frac{\lambda + 4}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda + 4 \\ 2y = -\lambda \end{cases}$$

Απαλείφουμε το λ από τις εξισώσεις και βρίσκουμε $2x + 2y - 4 = 0$ ή ισοδύναμα $x + y - 2 = 0$.

Άρα το κέντρο K του κύκλου (1) κινείται στην ευθεία $x + y - 2 = 0$.

γ. Έχουμε $2\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4$ και $\gamma = 2\sqrt{3}$. Ισχύει $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$, οπότε

$$\beta^2 = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 16 - 12 \Leftrightarrow \beta^2 = 4.$$

Επομένως η εξίσωση της έλλειψης C είναι: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, εφόσον οι εστίες της E', E βρίσκονται στον άξονα $y'y$.

δ. Η εξίσωση (1) της υπόθεσης για $\lambda = 0$ γίνεται $x^2 + y^2 - 4x = 0$ που είναι η εξίσωση του κύκλου C_1 με κέντρο το σημείο $K_1(2, 0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της έλλειψης C στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι:

$$\frac{x x_1}{4} + \frac{y y_1}{16} = 1 \text{ ή ισοδύναμα } 4x x_1 + y y_1 - 16 = 0.$$

Η ε εφάπτεται και του κύκλου C_1 , άρα ισχύει: $d(K_1, \varepsilon) = \rho_1$, (2).

i. Από την σχέση (2) έχουμε ισοδύναμα $\frac{|4 \cdot 2 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 - 16|}{\sqrt{(4x_1)^2 + y_1^2}} = 2 \Leftrightarrow$

$$8|x_1 - 2| = 2\sqrt{16x_1^2 + y_1^2} \Leftrightarrow 16(x_1 - 2)^2 = 16x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow$$

$$16x_1^2 - 64x_1 + 64 = 16x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow y_1^2 = 64(1 - x_1).$$

ii. Το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη C : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, άρα,

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 4x_1^2 + y_1^2 = 16 \Leftrightarrow y_1^2 = 16 - 4x_1^2 \quad (3).$$

Έτσι η σχέση $y_1^2 = 64(1 - x_1)$ λόγω της (3), γράφεται:

$$16 - 4x_1^2 = 64(1 - x_1) \Leftrightarrow 4x_1^2 - 64x_1 + 48 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 16x_1 + 12 = 0 \quad (4)$$

Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, 4)$ και $\vec{\beta} = (x_1, 3 - 4x_1)$ είναι μεταξύ τους κάθετα, όταν:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \text{ ή ισοδύναμα } x_1 \cdot x_1 + 4 \cdot (3 - 4x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 16x_1 + 12 = 0,$$

που ισχύει λόγω της (4).