

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Θέμα 1ο

A_1, A_2, A_3 Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο σελ. 60-61)

B_1 : α 4

β 1

γ 2

B_2 το Γ

Θέμα 2ο

α) Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 1 \cdot 1 \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$$(4\vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha})^2 = 16\vec{\beta}^2 + 4\vec{\alpha}^2 + 16\vec{\alpha}\vec{\beta} = 16 + 4 - 8 = 12$$

$$(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

β) Από τη διανυσματική ακτίνα μέσου είναι

$$2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AG}$$

ή $2\vec{AM} = (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - 3\vec{\beta}$

ή $\vec{AM} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Ακόμα, $\vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB} = -3\vec{\beta} - (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -4\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$

γ) Είναι $\cos(\widehat{AM, BG}) = \frac{\vec{AM} \cdot \vec{BG}}{|\vec{AM}| \cdot |\vec{BG}|}$ (1)

αλλά $\vec{AM} \cdot \vec{BG} = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (-4\vec{\beta} - 2\vec{\alpha})$

$$= 4\vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta}$$

$$= 4 - 2 + 1 = 3$$

και $|\vec{AM}|^2 = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 3$, άρα $|\vec{AM}| = \sqrt{3}$

$$|\overline{B\Gamma}|^2 = |-4\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}|^2 = (4\vec{\beta} - 2\vec{\alpha})^2 = 12, \text{ άρα } |\overline{B\Gamma}| = 2\sqrt{3}$$

Έτσι η (1) δίνει

$$\cos(\widehat{AM, B\Gamma}) = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \text{ οπότε: } (\widehat{AM, B\Gamma}) = \frac{\pi}{3}$$

Θέμα 3ο

1ος τρόπος.

α) Αφού ο α είναι περιττός, υπάρχει ακέραιος λ, ώστε:

$$\alpha = 2\lambda + 1 \text{ άρα } \kappa - 1 = 2\lambda + 1 \Leftrightarrow \kappa = 2\lambda + 2$$

Τότε, $\beta = 3\kappa + 1 = 3(2\lambda + 2) + 1 = 6\lambda + 6 + 1 = 6\lambda + 7 = 2(3\lambda + 3) + 1$ οπότε
 $\beta = \text{περιττός}$

β) Είναι $\kappa - 1/3\kappa + 1$ πρέπει $\kappa - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \kappa \neq 1$ (1)

Και προφανώς $\kappa - 1/3(\kappa - 1)$

Άρα $\kappa - 1/3\kappa + 1 - 3(\kappa - 1) \Leftrightarrow \kappa - 1/4$

Έτσι $\kappa - 1 = \pm 1, \kappa - 1 = \pm 2, \kappa - 1 = \pm 4$

Οπότε, $\kappa = 0, \kappa = 2, \kappa = -1, \kappa = 3, \kappa = -3, \kappa = 5$ Δεκτές τιμές από (1).

γ) i) $2\alpha + 1 = 2(\kappa - 1) + 1 = 2\kappa - 1$

$$\beta - 3 = 3\kappa + 1 - 3 = 3\kappa - 2$$

Έστω $\delta = (2\alpha + 1, \beta - 3)$ τότε

$$\delta/2\alpha + 1 \Leftrightarrow \delta/2\kappa - 1$$

$$\delta/\beta - 3 \Leftrightarrow \delta/3\kappa - 2$$

Έτσι $\delta/3(2\kappa - 1) - 2(3\kappa - 2) \Leftrightarrow \delta/1$, οπότε $\delta = 1$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad [2\alpha + 1, \beta - 3] &= |(2\alpha + 1)(\beta - 3)| \\ &= |(2\kappa - 1)(3\kappa - 2)| \\ &= |6\kappa^2 - 7\kappa + 2| \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $6\kappa^2 - 7\kappa + 2$ έχει ρίζες $\kappa_1 = \frac{1}{2}$, $\kappa_2 = \frac{2}{3}$ και γίνεται αρνητικό μεταξύ των ριζών του, όπου όμως δεν υπάρχει ακέραια τιμή του κ . Έτσι $6\kappa^2 - 7\kappa + 2 > 0$ οπότε

$$|6\kappa^2 - 7\kappa + 2| = 6\kappa^2 - 7\kappa + 2$$

Και έτσι $|2\alpha + 1, \beta - 3| = 6\kappa^2 - 7\kappa + 2$

2ος τρόπος.

Από $\alpha = \kappa - 1$ και $\beta = 3\kappa + 1$ προκύπτει $\beta = 3\alpha + 4$

- α) με α περιττό είναι 3α περιττός, έτσι $3\alpha + 4$ περιττός, άρα β περιττός.
- β) $\alpha / \beta \Leftrightarrow \alpha / (3\alpha + 4) \Leftrightarrow \alpha / 4 \Leftrightarrow \kappa - 1 / 4$ κλπ.
- γ) $(2\alpha + 1, \beta - 3) = (2\alpha + 1, 3\alpha + 1) = (2\alpha + 1, 3\alpha + 1 - 2\alpha - 1) = (2\alpha + 1, \alpha) = (2\alpha + 1 - 2\alpha, \alpha) = (1, \alpha) = 1$
- δ) παρομοίως.

3ος τρόπος για το β).

$$\alpha / \beta \Leftrightarrow \beta = \lambda \alpha \Leftrightarrow 3\kappa + 1 = \lambda(\kappa - 1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \kappa = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 3} = \frac{\lambda - 3 + 1}{\lambda - 3} = 1 + \frac{4}{\lambda - 3} \in \mathbb{Z}$$

άρα $\lambda - 3 = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ και άρα $\kappa = 1 + (\pm 4), 1 + (\pm 2), 1 + (\pm 1)$ κλπ. (... με τους περιορισμούς των α, λ).

Θέμα 4ο.

α) $C_1: (x-12)^2 + (y-6)^2 = 10$
 $C_2: (x-12)^2 + (y-6)^2 = 16$

β) Είναι $(KA) = \dots = \sqrt{5} < \rho_1 = \sqrt{10}$
 $(KB) = \dots = \sqrt{13}, \rho_1 < \sqrt{13} < \rho_2 = 4$

Άρα:

- Το Α ανήκει στο κυκλικό δίσκο που ορίζει ο C_1 άρα στο Α η λήψη είναι "πολύ καλή".
- Το Β είναι εξωτερικό σημείο του C_1 και εσωτερικό του C_2 οπότε στο Β η λήψη είναι "καλή".

γ) (Σχετική θέση ευθείας και κύκλου.)

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|12-6-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

και αφού $\sqrt{10} < \frac{5}{\sqrt{2}} < 4$

είναι $\rho_1 < d(K, \varepsilon) < \rho_2$

Επομένως, υπάρχει τμήμα με "καλή" λήψη και δεν υπάρχει αντίστοιχο τμήμα με "πολύ καλή" λήψη.